Suites, logique, limite et continuité

3 et 4 Septembre 2018

© Exercice du cours ♦ Exercice plus difficile

1 Suites arithmétiques et géométriques

Exercice 1.0.1. © *Soit une suite arithmétique de raison* $r = 14$*. Si* $a_{23} = 54$*, que vaut* a_0 *?*

Exercice 1.0.2. © *Calculer la somme des entiers naturels compris entre* 1000 *et* 10000*.*

Exercice 1.0.3. © *On considère la suite arithmétique* (a_n) *de raison* r *dont on connaît* $a_{100} = 90$ *et* $a_{1000} = 900$*.*

1. *Calculer la raison* r *et le premier terme* a_0*.*
2. *Calculer la somme des termes de* a_{100} *à* a_{1000}*.*

Exercice 1.0.4. © *On considère une suite* (g_n) *géométrique de raison* r *dont on connaît les termes suivants :* $g_3 = 3$ *et* $g_5 = 12$*. Quelles sont les valeurs de* r *possibles ?*

Exercice 1.0.5. *Déterminer si les suites suivantes sont arithmétiques ou géométriques. Dans ce cas, indiquer alors la raison et le* 1^e *terme. Justifier correctement la réponse.*

$$a_n = 3n - 2 \qquad b_n = 3 \times 2^n \qquad c_n = 3^n \times 2^n$$

$$d_n = (n+1)^2 - n^2 \qquad e_n = \frac{2}{n+4} \qquad f_n = \frac{1}{e_n}$$

$$g_n = \frac{-3}{2^{n+1}} \qquad h_n = \frac{3^{2n+1}}{5^{2n}} \qquad i_n = 2^n + 7^n$$

Exercice 1.0.6. ©

1. *Calculer les valeurs exactes des sommes suivantes :*

$$1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 512 \qquad 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \tfrac{1}{512}$$

$$2 + 6 + 18 + \ldots + 118098 \qquad 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \ldots + 4096$$

2. ♦ *Même question avec les sommes suivantes (les "…" signifient que ces sommes contiennent un nombre infini de termes) :*

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \ldots \qquad 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$$

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \ldots \qquad 0.1 + 0.01 + +0.001 + 0.0001 + \ldots$$

Exercice 1.0.7. © *On décide de partager un gâteau de la façon suivante : la première personne prend la moitié du gâteau (1/2), la seconde personne prend la moitié de la moitié restante (soit 1/4), la troisième personne 1/8, la quatrième 1/16, et ainsi de suite.*

1. *Que vaut la proportion du gâteau mangée par la n-ème personne ? et la proportion S_n mangée par les n premières personnes réunies ?*
2. *Vers quoi tend cette proportion S_n quand $n \to +\infty$? Commenter.*

Exercice 1.0.8. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.*

1. *Écrire mathématiquement de deux façons que la suite (u_n) est arithmétique.*
2. *Écrire mathématiquement de deux façons que la suite (u_n) est géométrique.*

   On suppose dorénavant que la suite (u_n) est définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{5} + 8$.
3. *La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ? Justifier.*

   On considère la suite $v_n = u_n - 10$.
4. *Montrer que (v_n) est géométrique.*
5. *En déduire un expression implicite de la suite (u_n).*

2 Sommes, produits et démonstration par récurrence

Exercice 2.0.1. *Calculer les sommes et produits suivants.*

1. © $\displaystyle\sum_{i=3}^{5} \frac{1}{i-2}$
2. $\displaystyle\sum_{j=2}^{7} j^2 - 1$
3. $\displaystyle\sum_{i=2}^{7} (i^2 - 1)$
4. © $\displaystyle\prod_{k=-4}^{-1} k$.
5. $\displaystyle\prod_{j=0}^{2} (j^3 + 1)$
6. $\displaystyle\prod_{j=0}^{2} 2(j^3 + 1)$

Exercice 2.0.2.

1. *Calculer* $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$ *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*
2. *Calculer* $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k)$ *puis* $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k+1)$ *pour $n \in \mathbb{N}^*$.*

   Indice : On pourra utiliser une agréable écriture de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k$.

Exercice 2.0.3. *Changement de variables*

1. *Trouver a, $b \in \mathbb{R}$ tels que* $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$ *et en déduire* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.
2. ♦ *Appliquer une méthode similaire pour calculer les sommes suivantes.*

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^2+2k}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(k-2)}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$

3. ♦ *Calculer* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k$ *en utilisant le changement de variable* $j = k-1$.

Exercice 2.0.4. ***Récurrences classiques*** - *Montrer pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $q \neq 1$,

© $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

Exercice 2.0.5. *Soit* (u_n) *la suite définie pour tout* $n > 0$ *par* $u_1 = 1$ *et* $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}$.

Montrer que pour tout $n > 0$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Exercice 2.0.6. *Montrer que, pour tout entier* $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$.

Exercice 2.0.7. © *Soit* (u_n) *la suite définie pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *par*

$$u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\ .$$

Montrer par récurrence que $u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.
Indice : on pourra utiliser (et démontrer) le fait que $\frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Exercice 2.0.8. *Soit* (u_n) *une suite définie par* $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Démontrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 2$.

Exercice 2.0.9. *Démontrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $(n+1)! \geqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!$.

3 Ensembles et logique

Exercice 3.0.1. ©

1. *Que vaut* $\mathbb{Z} \cap \mathbb{R}_+$?
2. *Soit* $x \in \mathbb{Q}$. *Montrer qu'il existe* $p \in \mathbb{Z}$ *et* $q \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $x = p/q$.

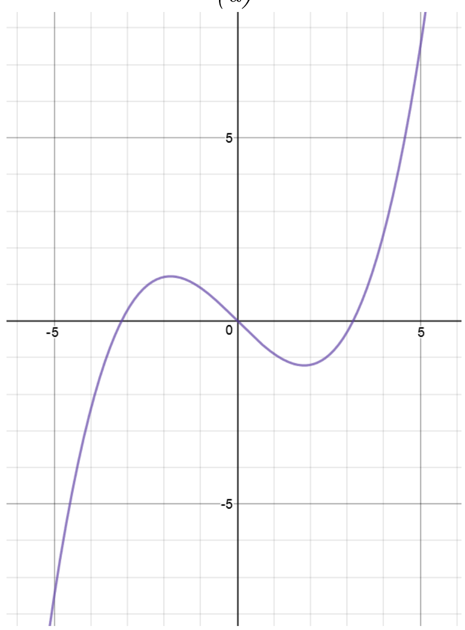
Exercice 3.0.2. *Déterminer les négations des propositions suivantes.*

1. © *Il a acheté une casserole et une poêle.*
2. © *Elle déménage à Paris ou à Marseille.*
3. *S'il pleut, je reste à la maison.*

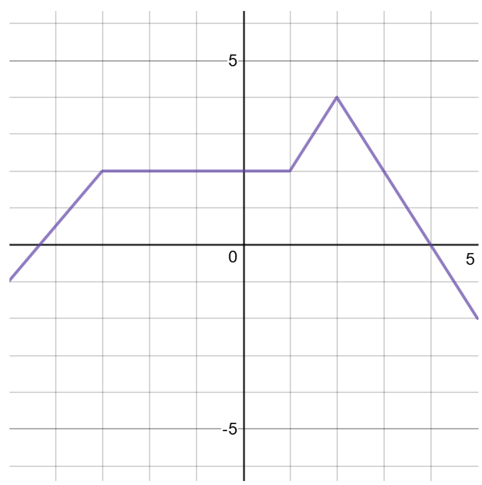
Exercice 3.0.3. *Voici 4 assertions mathématiques et 4 graphes de fonctions de domaine de définition $\mathcal{D} = [-5, 5]$. Chaque fonction vérifie une seule des 4 assertions. Retrouver quelle assertion chaque fonction vérifie.*

1. $\exists x_0 \in \mathcal{D},\ \exists a > 0,\ \forall x \in [x_0 - a, x_0 + a],\ f(x) = f(x_0)$.
2. $\forall x \in \mathcal{D},\ \exists y \in \mathcal{D},\ x \neq y$ *et* $f(x) + f(y) = 0$
3. $\exists a > 0,\ \forall x \in \mathcal{D},\ f(x) \geqslant a$
4. $\exists x \in \mathcal{D},\ \exists y \in \mathcal{D},\ f(x) - f(y) \geqslant 20$

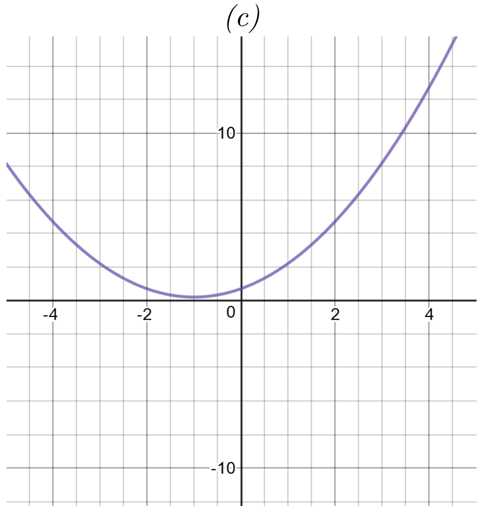
(a)



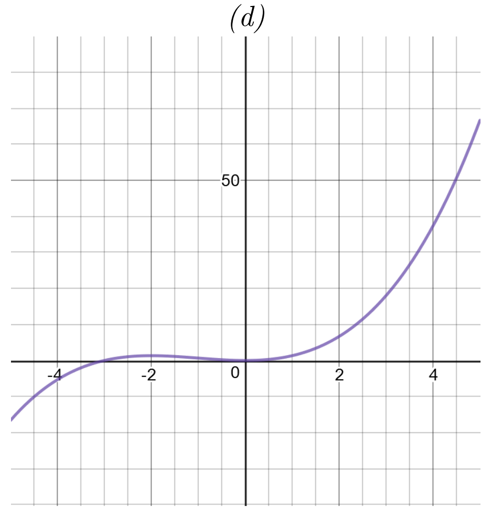
(b)



(c)



(d)



Exercice 3.0.4. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Écrire en symboles mathématiques les assertions suivantes.*

1. © *La fonction f est positive.*
2. *La fonction f n'est pas négative.*
3. *La fonction f est nulle partout.*
4. © *La fonction f ne s'annule jamais.*
5. © *La fonction f n'est pas majorée par 3 sur $\mathbb{R}$.*
6. *La fonction f est minorée sur $\mathbb{R}$.*
7. $\blacklozenge$ *La fonction f n'est pas bornée.*

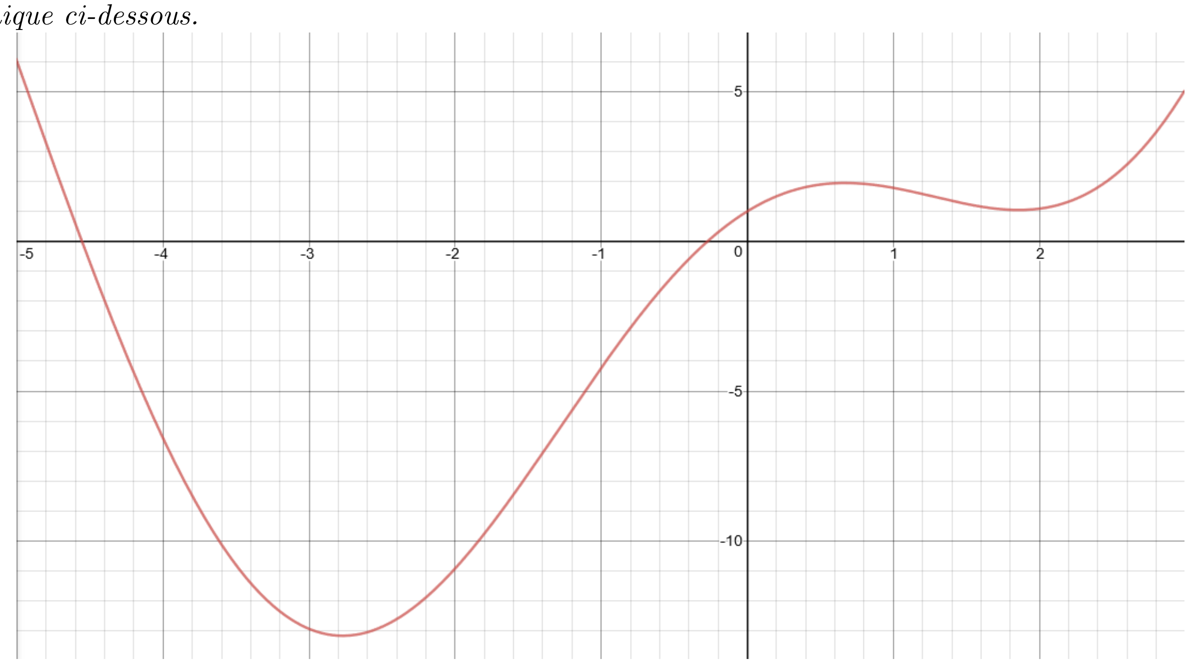
Exercice 3.0.5. ©

1. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Traduire la phrase suivante sous la forme d'une implication : "Si a est 100 fois plus grand que b, alors $\sqrt{a}$ est 10 fois plus grand que $\sqrt{b}$".*
2. *Le théorème de Pythagore stipule que*

   "Si ABC est un triangle rectangle en C, alors $AB^2 = AC^2 + BC^2$."

   Énoncer la contraposée du théorème de Pythagore. Énoncer aussi la réciproque du théorème de Pythagore et la contraposée de la réciproque.
3. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que l'implication "$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$" est vraie.*
4. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Les assertions "$x^2 > 1$" et "$x > 1$" sont-elles équivalentes ?*

Exercice 3.0.6. *Soit g la fonction définie sur $\mathcal{D} = [-5, 3]$ dont on donne la représentation graphique ci-dessous.*



Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

1. $\forall x \in [-4, -1],\ g(x) < 0.$
2. $\forall x \in \mathcal{D},\ \exists y \in \mathcal{D},\ g(y) = g(x).$
3. $\exists x \in \mathcal{D},\ \forall y \in \mathcal{D},\ g(y) = g(x).$
4. $\forall x \in \mathcal{D},\ \exists y \in \mathcal{D},\ y \neq x$ *et* $g(y) = g(x).$
5. $\forall x \in \mathcal{D},\ g(x) \geqslant -15.$
6. $\exists x \in \mathcal{D},\ \forall M \in \mathbb{R},\ g(x) \leqslant M.$
7. $\forall x \in \mathcal{D},\ \exists M \in \mathbb{R},\ g(x) \leqslant M.$
8. $\exists x \in \mathcal{D},\ \forall M \in \mathbb{R},\ g(x) \leqslant M^2.$

4 Généralités sur les fonctions

Exercice 4.0.1. ***Majorants et minorants***

1. *Montrer que la fonction* h *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $h(x) = \cos(x^3) + \dfrac{1}{x^2}$ *est bornée sur* $\mathcal{D} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.
2. *Montrer que la fonction* g *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $g(x) = 3 - x^2$ *est majorée par* 3 *mais n'est pas minorée.*
3. © *Soit* $f\colon U \to \mathbb{R}$. *Montrer que* f *est minorée si et seulement* $-f$ *est majorée. Montrer que* f *est bornée si et seulement si* f *est majorée et minorée.*
4. © *Pour les fonctions suivantes d'une variable réelle* x *donner leur domaine de définition et dire si elles sont majorées, minorées, bornées :* $\frac{1}{x^2}$, $-\sqrt{\log(x)}$, $\exp\left(-x^4\right)$.
5. © *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par* $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. *Étudier les variations de* f, *montrer que* f *est majorée par* $\frac{1}{2}$ *et minorée par* $-\frac{1}{2}$, *puis tracer son graphe.*

Exercice 4.0.2. ***Monotonie, périodicité et parité***

1. © *Soit* $U =]-\infty, 0[$ *et* $f : U \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = 1/x$. f *est-elle monotone ? Et sur* $U =]0, +\infty[$ *? Et sur* $U =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ *?*
2. © *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on note* $E(x)$ *la partie entière de* x. $E(x)$ *est l'unique entier vérifiant*
$$E(x) \leqslant x < E(x) + 1.$$
Soit $\mathrm{frac}(x) = x - E(x)$ *la partie fractionnaire de* x. *Tracer le graphe de la fonction* $x \mapsto \mathrm{frac}(x)$ *et montrer qu'elle est périodique.*
3. ♦ *Soit* P *une fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *où* $a_k \in \mathbb{R}$.
Quelles conditions doit-on imposer aux réels a_k *pour que* P *soit une fonction impaire ?*
4. *Montrer que la fonction* h *définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par* $h(x) = \cos(x^3) + \dfrac{1}{x^2}$ *est paire.*
5. *Que peut-on dire d'une fonction à la fois paire et impaire ?*
6. *Soit* f *une fonction définie sur* $\mathbb{R}$ T*-périodique* ($T \neq 0$).
   (a) *Déterminer la période des fonctions suivantes.*
   $$g_1(x) = -2f(x) + 3 \qquad g_2(x) = f(\tfrac{x}{4})) \qquad g_3(x) = f(2x+1)$$
   (b) ♦ *Démontrer que la fonction* g *définie par* $g(x) = xf(x)$ *n'est pas périodique.*
7. © ♦ *On considère la fonction* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sin\left(\pi f(x)\right)$, *où* f *est définie à la question 5 (ex précédent). Déduire de l'étude de* f *les variations, la parité, la périodicité de* g *et tracer son graphe.*

5 Limite et continuité

Exercice 5.0.1. *Déterminer, si elles existent, les limites suivantes.*

1. © $\dfrac{2x^2-x-2}{3x^2+2x+2}$ *en* 0 *et en* $+\infty$
2. $\dfrac{x^2+x-4}{4x^3-x^2+2}$ *en* 0 *et en* $+\infty$
3. © $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *en* $+\infty$
4. © $\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$ *en* $+\infty$
5. $xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *en* 0
6. $\dfrac{1}{x-1}$ *en* 1
7. $\dfrac{1}{(x-1)^2}$ *en* 1
8. $\dfrac{x+1}{x^2-1}$ *en* 1 *et* -1
9. © ♦ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$.
10. © ♦ $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$?

Exercice 5.0.2.

1. © *En utilisant la définition de la limite (avec* ϵ *et* δ*), montrer que* $\lim\limits_{x\to 2}(3x+1)=7$.
2. *Même question pour* $\lim\limits_{x\to\infty} x^2+1=+\infty$.
3. © *Montrer que si* f *admet une limite finie en* x_0 *alors il existe* $\delta>0$ *tel que* f *est bornée sur* $]x_0-\delta, x_0+\delta[$.
4. © *Soit* f *une fonction continue et* x_0 *tels que* $f(x_0)=1$. *Montrer qu'il existe* $\delta>0$ *tel que : pour tout* $x\in]x_0-\delta, x_0+\delta[\quad f(x)>\frac{1}{2}$.
5. *Soit* f *une fonction définie sur* $[a,b]$ *tel que pour tout* $x,\ y\in[a,b]$ *tels que* $x\neq y$, $|f(x)-f(y)|<|x-y|$. *Montrer que* f *est continue sur* $[a,b]$.

Exercice 5.0.3. ***Fonctions définies par morceaux***

1. *Les fonctions suivantes sont-elles continues sur* $\mathbb{R}$?

$$f(x)=\begin{cases} |x|+x+1 & \text{si } x\leqslant 1\\ x(x^2+1) & \text{si } x>1\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} e^x(x+1) & \text{si } x<0\\ 1-x & \text{si } x\geqslant 0\end{cases}$$

2. *Soit* g *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$g(x)=\begin{cases} \frac{1}{\ln|x|} & \text{si } x\notin\{0,1,-1\}\\ 0 & \text{si } x\in\{0,1,-1\}\end{cases}.$$

Déterminer le domaine de continuité de g.

3. © *Trouver les couples* $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ *tels que la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x)=ax+b$ *si* $x<0$ *et* $f(x)=\exp(x)$ *si* $x\geqslant 0$ *soit continue sur* $\mathbb{R}$. *Et si on avait* $f(x)=\dfrac{a}{x-1}+b$ *pour* $x<0$?

Exercice 5.0.4. *Déterminer le domaine de définition et de continuité des fonctions suivantes :*

$$a(x)=\sqrt{2-x} \qquad b(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{2x-3} \qquad c(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$$

$$© \ f(x)=\frac{1}{\sin x} \qquad © \ g(x)=\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{2}}} \qquad © \ h(x)=\ln(x^2+x-1)$$

Exercice 5.0.5. ©

1. *Étudier la continuité de* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par :* $f(x) = \sin(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ *si* $x \neq 0$ *et* $f(0) = 0$.
2. ♦ *La fonction définie par* $f(x) = \frac{x^3+8}{|x+2|}$ *admet-elle un prolongement par continuité en* -2 *?*
3. ♦ *Soit la suite définie par* $u_0 > 0$ *et* $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$. *Montrer que* (u_n) *admet une limite* $\ell \in \mathbb{R}$ *lorsque* $n \to +\infty$. *À l'aide de la fonction* $f(x) = \sqrt{x}$ *calculer cette limite.*

6 Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 6.0.1. *Soit* f *une fonction continue sur* $\mathbb{R}$ *dont le tableau de variation est le suivant. Donner le nombre de solutions de* $f(x) = 0$ *et de* $f(x) = -5$.

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 6.0.2.

1. © *Soient* $P(x) = x^5 - 3x - 2$ *et* $f(x) = x2^x - 1$ *deux fonctions définies sur* $\mathbb{R}$. *Montrer que*
   (a) *l'équation* $P(x) = 0$ *a au moins une solution dans* $[1, 2]$ *;*
   (b) *l'équation* $f(x) = 0$ *a au moins une solution dans* $[0, 1]$ *;*
   (c) *l'équation* $P(x) = f(x)$ *a au moins une solution dans* $]0, 2[$.
2. *Soit* f *une fonction continue sur* $\mathbb{R}$ *tel que pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $f(x)^2 = 1$. *Montrer que* $f = 1$ *ou* $f = -1$ *sur* $\mathbb{R}$. *(Indication : démonstration par l'absurde)*
3. © *Montrer qu'il existe* $x > 0$ *tel que* $2^x + 3^x = 7^x$.
4. © *Dessiner le graphe d'une fonction continue* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tel que*

   (a) $f(\mathbb{R}) = [0, 1]$
   (b) $f(\mathbb{R}) =]0, 1[$
   (c) $f(\mathbb{R}) = [0, 1[$
   (d) $f(\mathbb{R}) =]-\infty, 1]$
   (e) $f(\mathbb{R}) =]-\infty, 1[$

5. © *Soient* $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues. Quelles sont, parmi les fonctions suivantes, celles dont on peut affirmer qu'elles sont bornées :* $f + g$, $f \times g$, f/g *?*
6. *Soit* $f : [0, 1] \to [0, 1]$ *une fonction continue. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer qu'il existe* $x_0 \in [0, 1]$ *tel que* $f(x_0) = x_0$.*Soit* $f : [0, 1] \to [0, 1]$ *une fonction continue. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer qu'il existe* $x_0 \in [0, 1]$ *tel que* $f(x_0) = x_0$.
7. © ♦ *Soient* f *et* g *deux fonctions continues sur* $[0, 1]$ *telles que* $\forall x \in [0, 1]$ $f(x) < g(x)$. *Montrer qu'il existe* $m > 0$ *tel que* $\forall x \in [0, 1]$ $f(x) \leqslant g(x) - m$. *Ce résultat est-il vrai si on remplace* $[0, 1]$ *par* $\mathbb{R}$ *?*