Une méthode pour majorer le nombre de $\mathbb{F}_q$-points d'une courbe sur une surface torique

Jade Nardi

MANTA 4 - 7 janvier 2019

Pour compter le nombre de $\mathbb{F}_q$-points d'une variété, il faut compter le nombre de *points fixes* sous le Frobenius.
Pour *majorer*, on va relaxer cette condition.

Pour compter le nombre de $\mathbb{F}_q$-points d'une variété, il faut compter le nombre de *points fixes* sous le Frobenius.
Pour *majorer*, on va relaxer cette condition.

Fixons une une courbe plane C absolument irréductible de degré d d'équation $f \in \mathbb{F}_q[x, y]$. Pour majorer le nombre de $\mathbb{F}_q$-points de C, Stöhr et Voloch proposent de compter le nombre de points dont le Frobenius est sur leur tangente.

Pour compter le nombre de $\mathbb{F}_q$-points d'une variété, il faut compter le nombre de *points fixes* sous le Frobenius.
Pour *majorer*, on va relaxer cette condition.

Fixons une une courbe plane C absolument irréductible de degré d d'équation $f \in \mathbb{F}_q[x,y]$. Pour majorer le nombre de $\mathbb{F}_q$-points de C, Stöhr et Voloch proposent de compter le nombre de points dont le Frobenius est sur leur tangente.
Comment ? Grâce à *l'équation globale de la tangente* sur $\mathbb{A}^2$!

$$t_P(x,y) = (x - x_P)\partial_x f(x_P, y_P) + (y - y_P)\partial_y f(x_P, y_P)$$

Pour compter le nombre de $\mathbb{F}_q$-points d'une variété, il faut compter le nombre de *points fixes* sous le Frobenius.
Pour *majorer*, on va relaxer cette condition.

Fixons une une courbe plane C absolument irréductible de degré d d'équation $f \in \mathbb{F}_q[x,y]$. Pour majorer le nombre de $\mathbb{F}_q$-points de C, Stöhr et Voloch proposent de compter le nombre de points dont le Frobenius est sur leur tangente.
Comment ? Grâce à *l'équation globale de la tangente* sur $\mathbb{A}^2$!

$$t_P(x,y) = (x - x_P)\partial_x f(x_P, y_P) + (y - y_P)\partial_y f(x_P, y_P)$$
$$\Downarrow$$
$$h(x,y) = (x^q - x)\partial_x f(x,y) + (y^q - y)\partial_y f(x,y)$$

$$h(x,y) = (x^q - x)\partial_x f(x,y) + (y^q - y)\partial_y f(x,y)$$

Soit D la courbe définie par $h = 0$.

$$h(x,y) = (x^q - x)\partial_x f(x,y) + (y^q - y)\partial_y f(x,y)$$

Soit D la courbe définie par $h = 0$. Alors

- $C(\mathbb{F}_q) \subset C \cap D = \{P \in C \mid \Phi(P) \in T_P C\}$.
- En tout point $P \in C(\mathbb{F}_q)$, $i(C, D; P) \geq 2$.
- Si C n'a pas que des points d'inflexion, alors f ne divise pas h.

$$h(x,y) = (x^q - x)\partial_x f(x,y) + (y^q - y)\partial_y f(x,y)$$

Soit D la courbe définie par $h = 0$. Alors

- $C(\mathbb{F}_q) \subset C \cap D = \{P \in C \mid \Phi(P) \in T_P C\}$.
- En tout point $P \in C(\mathbb{F}_q)$, $i(C, D; P) \geq 2$.
- Si C n'a pas que des points d'inflexion, alors f ne divise pas h.

On a donc $C(\mathbb{F}_q) \leq \frac{1}{2} C \cdot D$

$$h(x,y) = (x^q - x)\partial_x f(x,y) + (y^q - y)\partial_y f(x,y)$$

Soit D la courbe définie par $h = 0$. Alors

- $C(\mathbb{F}_q) \subset C \cap D = \{P \in C \mid \Phi(P) \in T_P C\}$.
- En tout point $P \in C(\mathbb{F}_q)$, $i(C, D; P) \geq 2$.
- Si C n'a pas que des points d'inflexion, alors f ne divise pas h.

On a donc $C(\mathbb{F}_q) \leq \frac{1}{2} C \cdot D = \frac{d}{2}(d + q - 1)$.

$$h(x,y) = (x^q - x)\partial_x f(x,y) + (y^q - y)\partial_y f(x,y)$$

Soit D la courbe définie par $h = 0$. Alors

- $C(\mathbb{F}_q) \subset C \cap D = \{P \in C \mid \Phi(P) \in T_P C\}$.
- En tout point $P \in C(\mathbb{F}_q)$, $i(C, D; P) \geq 2$.
- Si C n'a pas que des points d'inflexion, alors f ne divise pas h.

On a donc $C(\mathbb{F}_q) \leq \frac{1}{2} C \cdot D = \frac{d}{2}(d + q - 1)$.

Résultat étendu par les auteurs : majorer les $\mathbb{F}_q$-points d'une courbe dans $\mathbb{P}^r$ en comptant les points *dont le Frobenius appartient à leur hyperplan osculateur*.

Nous, on va chercher à étendre cette méthode à d'autre surfaces.
Objectif : On se donne une courbe C sur une surface S. On cherche une courbe D telle que

- $C(\mathbb{F}_q) \subset C \cap D$,
- $\forall\ P \in C(\mathbb{F}_q)$, $i(C, D; P) \geq 2$,
- $\dim C \cap D = 0$.

Adapter l'idée aux surfaces toriques

Une variété X sur K de dimension n est dite *torique* si elle contient un tore $\mathbb{T}^n$ dense tel que l'action naturelle du tore sur lui-même s'étende sur tout X.

Une variété X sur K de dimension n est dite *torique* si elle contient un tore $\mathbb{T}^n$ dense tel que l'action naturelle du tore sur lui-même s'étende sur tout X.

Exemples :

- $\mathbb{T}^n \subset \mathbb{A}^n$ via $(t_1, \ldots, t_n) \mapsto (t_1, \ldots, t_n)$
- $\mathbb{T}^n \subset \mathbb{P}^n$ via $(t_1, \ldots, t_n) \mapsto (t_1, \ldots, t_n, 1)$
- $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ via $(t_1, t_2) \mapsto ((t_1, 1), (t_2, 1))$

Une variété X sur K de dimension n est dite *torique* si elle contient un tore $\mathbb{T}^n$ dense tel que l'action naturelle du tore sur lui-même s'étende sur tout X.

Exemples :

- $\mathbb{T}^n \subset \mathbb{A}^n$ via $(t_1, \dots, t_n) \mapsto (t_1, \dots, t_n)$
- $\mathbb{T}^n \subset \mathbb{P}^n$ via $(t_1, \dots, t_n) \mapsto (t_1, \dots, t_n, 1)$
- $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ via $(t_1, t_2) \mapsto ((t_1, 1), (t_2, 1))$

On va d'abord se focaliser sur les **surfaces minimales**.

Théorème

Toute surface torique lisse complète est obtenue par suite d'éclatements toriques de $\mathbb{P}^2$ ou d'une surface de Hirzebruch.

Une variété X sur K de dimension n est dite *torique* si elle contient un tore $\mathbb{T}^n$ dense tel que l'action naturelle du tore sur lui-même s'étende sur tout X.

Exemples :

- $\mathbb{T}^n \subset \mathbb{A}^n$ via $(t_1, \dots, t_n) \mapsto (t_1, \dots, t_n)$
- $\mathbb{T}^n \subset \mathbb{P}^n$ via $(t_1, \dots, t_n) \mapsto (t_1, \dots, t_n, 1)$
- $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ via $(t_1, t_2) \mapsto ((t_1, 1), (t_2, 1))$

On va d'abord se focaliser sur les **surfaces minimales**.

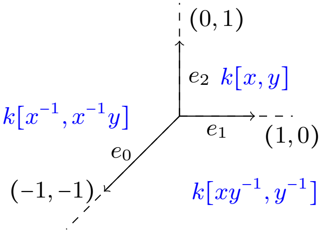
Théorème

Toute surface torique lisse complète est obtenue par suite d'éclatements toriques de $\mathbb{P}^2$ ou d'une surface de Hirzebruch.

Caractéristiques "sympathiques" d'une variété torique :

- Recouverte d'affines $\simeq \mathbb{A}^n$ avec changement de cartes connus.
- Agréable anneau de coordonnées R **polynomial**, appelé *Anneau de Cox*.
  Ex : $R = K[X_0, X_1, X_2]$ sur $\mathbb{P}^2$ ou $R = K[X_0, X_1, Y_0, Y_1]$ sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$
- Notion d'**homogénéisation**

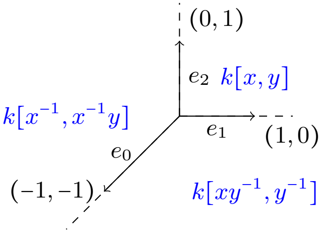
Eventail de $\mathbb{P}^2$:



Soit $F \in \mathbb{F}_q[X_0, X_1, X_2]$ de degré d.
On a trois cartes affine sur $\mathbb{P}^2$: $(X_i \neq 0)$.
Plaçons-nous sur la carte $X_0 \neq 0$.

Homogénéisation

Eventail de $\mathbb{P}^2$:



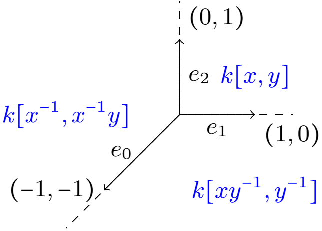
Soit $F \in \mathbb{F}_q[X_0, X_1, X_2]$ de degré d.
On a trois cartes affine sur $\mathbb{P}^2$: $(X_i \neq 0)$.
Plaçons-nous sur la carte $X_0 \neq 0$.
On pose $f(x,y) = F(1,x,y)$,

$$x = \frac{X_1}{X_0} \text{ et } y = \frac{X_2}{X_0}$$

et on homogénéise

$$h(x,y) = (x^q - x)\partial_x f(x,y) + (y^q - y)\partial_y f(x,y).$$

Eventail de $\mathbb{P}^2$:



Soit $F \in \mathbb{F}_q[X_0, X_1, X_2]$ de degré d.
On a trois cartes affine sur $\mathbb{P}^2$: $(X_i \neq 0)$.
Plaçons-nous sur la carte $X_0 \neq 0$.
On pose $f(x,y) = F(1,x,y)$,

$$x = \frac{X_1}{X_0} \text{ et } y = \frac{X_2}{X_0}$$

et on homogénéise

$$h(x,y) = (x^q - x)\partial_x f(x,y) + (y^q - y)\partial_y f(x,y).$$

Dérivées partielles :

$$\partial_x f(x,y) = \partial_{X_1} F(1,x,y) = \frac{1}{X_0^{d-1}} \partial_{X_1} F(\mathbf{X}) \text{ et } \partial_y f(x,y) = \frac{1}{X_0^{d-1}} \partial_{X_2} F(\mathbf{X})$$

$$h = \left(\frac{X_1^q}{X_0^q} - \frac{X_1}{X_0} \right) \frac{\partial_{X_1} F(\mathbf{X})}{X_0^{d-1}} + \left(\frac{X_2^q}{X_0^q} - \frac{X_2}{X_0} \right) \frac{\partial_{X_2} F(\mathbf{X})}{X_0^{d-1}}$$

$$h = \left(\frac{X_1^q}{X_0^q} - \frac{X_1}{X_0}\right)\frac{\partial_{X_1}F(\mathbf{X})}{X_0^{d-1}} + \left(\frac{X_2^q}{X_0^q} - \frac{X_2}{X_0}\right)\frac{\partial_{X_2}F(\mathbf{X})}{X_0^{d-1}}$$
$$= \frac{1}{X_0^{d+q-1}}\underbrace{\left[(X_1^q - X_0^{q-1}X_1)\partial_{X_1}F(\mathbf{X}) + (X_2^q - X_0^{q-1}X_2)\partial_{X_2}F(\mathbf{X})\right]}_{G_0(\mathbf{X})}$$

En utilisant l'identité d'Euler $\sum_{i=0}^{2} X_i \partial_{X_i} F(\mathbf{X}) = dF(\mathbf{X})$, on a

$$G_0(\mathbf{X}) = G(\mathbf{X}) - dX_0^{q-1}F(\mathbf{X}) \text{ avec } G(\mathbf{X}) = \sum_{i=0}^{2} X_i^q \partial_{X_i} F(\mathbf{X}).$$

Proposition [SV]

Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$ définie par un polynôme $F \in \mathbb{F}_q[X_0, X_1, X_2]$ homogène absolument irréductible de degré $d \geq 2$. Alors

$$\mathcal{C}(\mathbb{F}_q) \leq \frac{1}{2} d(d + q - 1)$$

s'il existe au moins un point qui n'est pas d'inflexion sur $\mathcal{C}$.

Proposition [SV]

Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$ définie par un polynôme $F \in \mathbb{F}_q[X_0, X_1, X_2]$ homogène absolument irréductible de degré $d \geq 2$. Alors

$$\mathcal{C}(\mathbb{F}_q) \leq \frac{1}{2}d(d+q-1)$$

s'il existe au moins un point qui n'est pas d'inflexion sur $\mathcal{C}$.

Posons $G = X_0^q F_{X_0} + X_1^q F_{X_1} + X_2^q F_{X_2}$ et $\mathcal{D}$ la courbe $G = 0$.
Admis : si $\mathcal{C}$ a un point non flex, F ne divise pas G.

Proposition [SV]

Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$ définie par un polynôme $F \in \mathbb{F}_q[X_0, X_1, X_2]$ homogène absolument irréductible de degré $d \geq 2$. Alors

$$\mathcal{C}(\mathbb{F}_q) \leq \frac{1}{2} d(d + q - 1)$$

s'il existe au moins un point qui n'est pas d'inflexion sur $\mathcal{C}$.

Posons $G = X_0^q F_{X_0} + X_1^q F_{X_1} + X_2^q F_{X_2}$ et $\mathcal{D}$ la courbe $G = 0$.
Admis : si $\mathcal{C}$ a un point non flex, F ne divise pas G.

Fixons $P \in \mathcal{C}(\mathbb{F}_q)$. Supposons $P \notin (X_0 = 0)$. Dans la carte $(X_0 \neq 0)$, les équations de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont $f(x, y) := F(1, x, y) = 0$ et

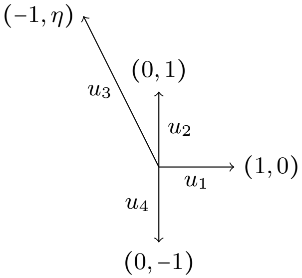
$$h(x, y) := (x^q - x) f_x + (y^q - y) f_y + df = 0.$$

Alors la multiplicité de P sur $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ est au moins 2. Par intersection, on a le résultat souhaité.

Soit $\eta \in \mathbb{N}$. On définit la surface de Hirzebruch $\mathcal{H}_\eta$ de paramètre η.

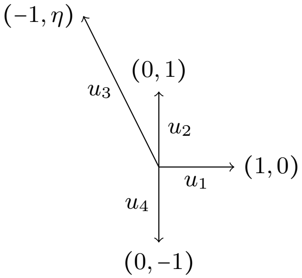
Soit $\eta \in \mathbb{N}$. On définit la surface de Hirzebruch $\mathcal{H}_\eta$ de paramètre η.

Eventail de $\mathcal{H}_\eta$:



Soit $\eta \in \mathbb{N}$. On définit la surface de Hirzebruch $\mathcal{H}_\eta$ de paramètre η.

Eventail de $\mathcal{H}_\eta$:



Point de vue "quotient" :
On fait agir $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ sur

$$\left(\mathbb{A}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}\right) \times \left(\mathbb{A}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}\right)$$

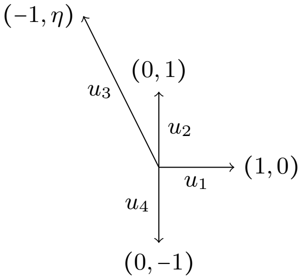
On note (t_1, t_2) les coordonnées sur le 1^e $\mathbb{A}^2$, (x_1, x_2) pour le 2^e et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$.

$$(\lambda, \mu)\cdot(t_1, t_2, x_1, x_2) = (\lambda t_1, \lambda t_2, \mu\lambda^{-\eta} x_1, \mu x_2).$$

$\mathcal{H}_\eta$ peut être définie comme le quotient $\left(\mathbb{A}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}\right) \times \left(\mathbb{A}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}\right) / \mathbb{G}_m^2$.

Soit $\eta \in \mathbb{N}$. On définit la surface de Hirzebruch $\mathcal{H}_\eta$ de paramètre η.

Eventail de $\mathcal{H}_\eta$:



Point de vue "quotient" :
On fait agir $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ sur

$$\left(\mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}\right) \times \left(\mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}\right)$$

On note (t_1, t_2) les coordonnées sur le 1^e $\mathbb{A}^2$, (x_1, x_2) pour le 2^e et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$.

$$(\lambda,\mu)\cdot(t_1,t_2,x_1,x_2) = (\lambda t_1, \lambda t_2, \mu\lambda^{-\eta}x_1, \mu x_2).$$

$\mathcal{H}_\eta$ peut être définie comme le quotient $\left(\mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}\right) \times \left(\mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}\right) / \mathbb{G}_m^2$.

C'est l'**éclaté** de $\mathbb{P}(1,1,\eta)$ en le point singulier.

Il peut se **plonger** dans $\mathbb{P}^{\eta+3}$.

L'*anneau de Cox* de $\mathcal{H}_\eta$ sur $\mathbb{F}_q$ est l'anneau $R = \mathbb{F}_q[T_1, T_2, X_1, X_2]$.
On le munit d'une **graduation**.

L'*anneau de Cox* de $\mathcal{H}_\eta$ sur $\mathbb{F}_q$ est l'anneau $R = \mathbb{F}_q[T_1, T_2, X_1, X_2]$.
On le munit d'une **graduation**.
Un monôme $M = T_1^{c_1} T_2^{c_2} X_1^{d_1} X_2^{d_2}$ est de bidegré (α, β) si

$$\begin{cases} \alpha & = c_1 + c_2 + \eta d_2, \\ \beta & = d_1 + d_2. \end{cases} \tag{1}$$

On note $R(\alpha, \beta)$ le $\mathbb{F}_q$-module des polynômes de bidegré (α, β).

L'*anneau de Cox* de $\mathcal{H}_\eta$ sur $\mathbb{F}_q$ est l'anneau $R = \mathbb{F}_q[T_1, T_2, X_1, X_2]$.
On le munit d'une **graduation**.
Un monôme $M = T_1^{c_1} T_2^{c_2} X_1^{d_1} X_2^{d_2}$ est de bidegré (α, β) si

$$\begin{cases} \alpha & = c_1 + c_2 + \eta d_2, \\ \beta & = d_1 + d_2. \end{cases} \tag{1}$$

On note $R(\alpha, \beta)$ le $\mathbb{F}_q$-module des polynômes de bidegré (α, β). Alors

$$R = \bigoplus_{(\delta_T, \delta_X) \in \mathbb{Z}^2} R(\delta_T, \delta_X).$$

En général, une variété torique est muni d'un anneau de Cox polynomial avec autant de variables que de rayons dans son éventail. Chaque rayon correspond à un diviseur (lieu où la variable associée est nulle) et le groupe de Picard de la variété est engendré par ces diviseurs.

L'*anneau de Cox* de $\mathcal{H}_\eta$ sur $\mathbb{F}_q$ est l'anneau $R = \mathbb{F}_q[T_1, T_2, X_1, X_2]$.
On le munit d'une **graduation**.
Un monôme $M = T_1^{c_1} T_2^{c_2} X_1^{d_1} X_2^{d_2}$ est de bidegré (α, β) si

$$\begin{cases} \alpha & = c_1 + c_2 + \eta d_2, \\ \beta & = d_1 + d_2. \end{cases} \tag{1}$$

On note $R(\alpha, \beta)$ le $\mathbb{F}_q$-module des polynômes de bidegré (α, β). Alors

$$R = \bigoplus_{(\delta_T, \delta_X) \in \mathbb{Z}^2} R(\delta_T, \delta_X).$$

En général, une variété torique est muni d'un anneau de Cox polynomial avec autant de variables que de rayons dans son éventail. Chaque rayon correspond à un diviseur (lieu où la variable associée est nulle) et le groupe de Picard de la variété est engendré par ces diviseurs.

Ici, $\mathrm{Pic}(\mathcal{H}_\eta) = \mathbb{Z}D \oplus \mathbb{Z}E$ avec $D = (T_1 = 0)$, $E = (X_1 = 0)$,

$$D^2 = 0, \quad E^2 = -\eta, \quad D \cdot E = 1.$$

Une courbe $\mathcal{C}$ définie par un polynôme dans $R(\alpha, \beta)$ vérifie $\mathcal{C} \sim \alpha D + \beta E$.

Prenons $F \in R(\alpha, \beta)$. On a quatre cartes affines sur $\mathcal{H}_\eta$: $(T_i X_j \neq 0)$ pour $i, j \in \{1, 2\}$. Plaçons nous sur $(T_1 X_1 \neq 0)$. On pose

$$t = \frac{T_2}{T_1} \text{ et } x = \frac{X_2}{T_1^\eta X_1}$$

et on homogénéise $h(t, x) := (t^q - t)\partial_t f(t, x) + (x^q - x)\partial_x f(t, x)$.

Occupons-nous des dérivées partielles en $t = \frac{T_2}{T_1}$ et $x = \frac{X_2}{T_1^\eta X_1}$.

Occupons-nous des dérivées partielles en $t = \frac{T_2}{T_1}$ et $x = \frac{X_2}{T_1^\eta X_1}$.

Soit $M = T_1^{c_1} T_2^{c_2} X_1^{d_1} X_2^{d_2} \in R(\alpha, \beta)$ avec $\begin{cases} \alpha & = c_1 + c_2 + \eta d_2, \\ \beta & = d_1 + d_2, \end{cases}$ et $m(t,x) = M(1,t,1,x)$.

Occupons-nous des dérivées partielles en $t = \frac{T_2}{T_1}$ et $x = \frac{X_2}{T_1^\eta X_1}$.

Soit $M = T_1^{c_1} T_2^{c_2} X_1^{d_1} X_2^{d_2} \in R(\alpha, \beta)$ avec $\begin{cases} \alpha & = c_1 + c_2 + \eta d_2, \\ \beta & = d_1 + d_2, \end{cases}$ et $m(t,x) = M(1,t,1,x)$.

$$\begin{aligned} \partial_t m(t,x) = \partial_{T_2} M(1,t,1,x) &= c_2 \frac{T_2^{c_2-1}}{T_1^{c_2-1}} \frac{X_2^{d_2}}{T_1^{\eta d_2} X_1^{d_2}} = \frac{c_2 T_2^{c_2-1} X_2^{d_2}}{T_1^{c_2+\eta d_2-1} X_1^{d_2}} \\ &= \frac{c_2 T_1^{c_1} T_2^{c_2-1} X_1^{d_1} X_2^{d_2}}{T_1^{\alpha-1} X_1^{\beta}} = \frac{\partial_{T_2} M(T_1, T_2, X_1, X_2)}{T_1^{\alpha-1} X_1^{\beta}} \end{aligned}$$

Occupons-nous des dérivées partielles en $t = \frac{T_2}{T_1}$ et $x = \frac{X_2}{T_1^\eta X_1}$.

Soit $M = T_1^{c_1} T_2^{c_2} X_1^{d_1} X_2^{d_2} \in R(\alpha, \beta)$ avec $\begin{cases} \alpha & = c_1 + c_2 + \eta d_2, \\ \beta & = d_1 + d_2, \end{cases}$ et $m(t,x) = M(1,t,1,x)$.

$$\partial_t m(t,x) = \partial_{T_2} M(1,t,1,x) = c_2 \frac{T_2^{c_2-1}}{T_1^{c_2-1}} \frac{X_2^{d_2}}{T_1^{\eta d_2} X_1^{d_2}} = \frac{c_2 T_2^{c_2-1} X_2^{d_2}}{T_1^{c_2+\eta d_2 - 1} X_1^{d_2}}$$

$$= \frac{c_2 T_1^{c_1} T_2^{c_2-1} X_1^{d_1} X_2^{d_2}}{T_1^{\alpha-1} X_1^{\beta}} = \frac{\partial_{T_2} M(T_1, T_2, X_1, X_2)}{T_1^{\alpha-1} X_1^{\beta}}$$

$$\partial_x m(t,x) = \partial_{X_2} M(1,t,1,x) = d_2 \frac{T_2^{c_2}}{T_1^{c_2}} \frac{X_2^{d_2-1}}{T_1^{\eta(d_2-1)} X_1^{d_2-1}} = \frac{d_2 T_2^{c_2} X_2^{d_2-1}}{T_1^{c_2+\eta d_2-\eta} X_1^{d_2-1}}$$

$$= \frac{d_2 T_1^{c_1} T_2^{c_2} X_1^{d_1} X_2^{d_2-1}}{T_1^{\alpha-\eta} X_1^{\beta-1}} = \frac{\partial_{X_2} M(T_1, T_2, X_1, X_2)}{T_1^{\alpha-\eta} X_1^{\beta-1}}$$

On a donc

$$\partial_t m(t,x) = \frac{\partial_{T_2} M(T_1,T_2,X_1,X_2)}{T_1^{\alpha-1} X_1^{\beta}} \text{ et } \partial_x m(t,x) = \frac{\partial_{X_2} M(T_1,T_2,X_1,X_2)}{T_1^{\alpha-\eta} X_1^{\beta-1}}$$

$$\begin{aligned}
h(t,x) =& (t^q - t)\partial_t f(t,x) + (x^q - x)\partial_x f(t,x) \\
=& \left(\frac{T_2^q}{T_1^q} - \frac{T_2}{T_1}\right)\frac{\partial_{T_2} M(\mathbf{T},\mathbf{X})}{T_1^{\alpha-1} X_1^{\beta}} + \left(\frac{X_2^q}{T_1^{\eta q} X_1^q} - \frac{X_2}{T_1^{\eta} X_1}\right)\frac{\partial_{X_2} M(\mathbf{T},\mathbf{X})}{T_1^{\alpha-\eta} X_1^{\beta-1}} \\
=& \frac{(T_2^q - T_1^{q-1} T_2)\partial_{T_2} M(\mathbf{T},\mathbf{X})}{T_1^{\alpha+q-1} X_1^{\beta}} + \frac{(X_2^q - T_1^{\eta(q-1)} X_1^{q-1} X_2)\partial_{X_2} M(\mathbf{T},\mathbf{X})}{T_1^{\alpha+\eta(q-1)} X_1^{\beta+q-1}}
\end{aligned}$$

$$h(t,x) = \frac{(T_2^q - T_1^{q-1}T_2)\partial_{T_2} M(\mathbf{T},\mathbf{X})}{T_1^{\alpha+q-1}X_1^{\beta}} + \frac{(X_2^q - T_1^{\eta(q-1)}X_1^{q-1}X_2)\partial_{X_2} M(\mathbf{T},\mathbf{X})}{T_1^{\alpha+\eta(q-1)}X_1^{\beta+q-1}}$$

Pour mettre sur un dénominateur commun, il faut distinguer le cas $\eta = 0$.

$$h(t,x) = \frac{(T_2^q - T_1^{q-1}T_2)\partial_{T_2} M(\mathbf{T},\mathbf{X})}{T_1^{\alpha+q-1}X_1^{\beta}} + \frac{(X_2^q - T_1^{\eta(q-1)}X_1^{q-1}X_2)\partial_{X_2} M(\mathbf{T},\mathbf{X})}{T_1^{\alpha+\eta(q-1)}X_1^{\beta+q-1}}$$

Pour mettre sur un dénominateur commun, il faut distinguer le cas $\eta = 0$.
Si $\eta = 0$,

$$h(t,x) = \frac{X_1^{q-1}(T_2^q - T_1^{q-1}T_2)\partial_{T_2} M(\mathbf{T},\mathbf{X}) + T_1^{q-1}(X_2^q - X_1^{q-1}X_2)\partial_{X_2} M(\mathbf{T},\mathbf{X})}{T_1^{\alpha+q-1}X_1^{\beta+q-1}}$$

$$h(t,x) = \frac{(T_2^q - T_1^{q-1}T_2)\partial_{T_2} M(\mathbf{T},\mathbf{X})}{T_1^{\alpha+q-1}X_1^{\beta}} + \frac{(X_2^q - T_1^{\eta(q-1)}X_1^{q-1}X_2)\partial_{X_2} M(\mathbf{T},\mathbf{X})}{T_1^{\alpha+\eta(q-1)}X_1^{\beta+q-1}}$$

Pour mettre sur un dénominateur commun, il faut distinguer le cas $\eta = 0$.
Si $\eta = 0$,

$$h(t,x) = \frac{X_1^{q-1}(T_2^q - T_1^{q-1}T_2)\partial_{T_2} M(\mathbf{T},\mathbf{X}) + T_1^{q-1}(X_2^q - X_1^{q-1}X_2)\partial_{X_2} M(\mathbf{T},\mathbf{X})}{T_1^{\alpha+q-1}X_1^{\beta+q-1}}$$

Si $\eta \neq 0$,

$$h(t,x) = \frac{T_1^{(\eta-1)(q-1)}X_1^{q-1}(T_2^q - T_1^{q-1}T_2)\partial_{T_2} M + (X_2^q - T_1^{\eta(q-1)}X_1^{q-1}X_2)\partial_{X_2} M}{T_1^{\alpha+\eta(q-1)}X_1^{\beta+q-1}}$$

Sur chaque carte $(T_i X_j \neq 0)$, on fait de même et on obtient 4 polynômes :

$$G_{11} = \begin{cases} x_1^{q-1}\left(t_2^{q-1} - t_1^{q-1}\right) t_2 F_{t_2} + t_1^{q-1}\left(x_2^{q-1} - x_1^{q-1}\right) x_2 F_{x_2} & \text{si } \eta = 0 \\ t_1^{(\eta-1)(q-1)} x_1^{q-1}\left(t_2^{q-1} - t_1^{q-1}\right) t_2 F_{t_2} + \left(x_2^{q-1} - t_1^{\eta(q-1)} x_1^{q-1}\right) x_2 F_{x_2} & \text{si } \eta \geq 1 \end{cases}$$

$$G_{12} = x_2^{q-1}\left(t_2^{q-1} - t_1^{q-1}\right) t_2 F_{t_2} + t_1^{q-1}\left(t_1^{\eta(q-1)} x_1^{q-1} - x_2^{q-1}\right) x_1 F_{x_1}$$

$$G_{21} = \begin{cases} x_1^{q-1}\left(t_1^{q-1} - t_2^{q-1}\right) t_1 F_{t_1} + t_2^{q-1}\left(x_2^{q-1} - x_1^{q-1}\right) x_2 F_{x_2} & \text{si } \eta = 0 \\ t_2^{(\eta-1)(q-1)} x_1^{q-1}\left(t_1^{q-1} - t_2^{q-1}\right) t_1 F_{t_1} + \left(x_2^{q-1} - x_1^{q-1} t_2^{\eta(q-1)}\right) x_2 F_{x_2} & \text{si } \eta \geq 1 \end{cases}$$

$$G_{22} = x_2^{q-1}(t_1^{q-1} - t_2^{q-1}) t_1 F_{t_1} + t_2^{q-1}\left(x_1^{q-1} t_2^{\eta(q-1)} - x_2^{q-1}\right) x_1 F_{x_1}$$

Sur chaque carte $(T_i X_j \neq 0)$, on fait de même et on obtient 4 polynômes :

$$G_{11} = \begin{cases} x_1^{q-1}\left(t_2^{q-1} - t_1^{q-1}\right) t_2 F_{t_2} + t_1^{q-1}\left(x_2^{q-1} - x_1^{q-1}\right) x_2 F_{x_2} & \text{si } \eta = 0 \\ t_1^{(\eta-1)(q-1)} x_1^{q-1}\left(t_2^{q-1} - t_1^{q-1}\right) t_2 F_{t_2} + \left(x_2^{q-1} - t_1^{\eta(q-1)} x_1^{q-1}\right) x_2 F_{x_2} & \text{si } \eta \geq 1 \end{cases}$$

$$G_{12} = x_2^{q-1}\left(t_2^{q-1} - t_1^{q-1}\right) t_2 F_{t_2} + t_1^{q-1}\left(t_1^{\eta(q-1)} x_1^{q-1} - x_2^{q-1}\right) x_1 F_{x_1}$$

$$G_{21} = \begin{cases} x_1^{q-1}\left(t_1^{q-1} - t_2^{q-1}\right) t_1 F_{t_1} + t_2^{q-1}\left(x_2^{q-1} - x_1^{q-1}\right) x_2 F_{x_2} & \text{si } \eta = 0 \\ t_2^{(\eta-1)(q-1)} x_1^{q-1}\left(t_1^{q-1} - t_2^{q-1}\right) t_1 F_{t_1} + \left(x_2^{q-1} - x_1^{q-1} t_2^{\eta(q-1)}\right) x_2 F_{x_2} & \text{si } \eta \geq 1 \end{cases}$$

$$G_{22} = x_2^{q-1}(t_1^{q-1} - t_2^{q-1}) t_1 F_{t_1} + t_2^{q-1}\left(x_1^{q-1} t_2^{\eta(q-1)} - x_2^{q-1}\right) x_1 F_{x_1}$$

Si $\eta = 0$, tous les polynômes sont de bidegré $(\alpha + q - 1, \beta + q - 1)$.

Si $\eta \geq 1$, G_{11} et G_{21} ont bidegré $(\alpha + \eta(q-1), \beta + q - 1)$ et G_{12} et G_{22} ont bidegré $(\alpha + (q-1)(\eta+1), \beta + q - 1)$.

Théorème

Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ une courbe absolument irréductible de bidegré $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\#\mathcal{C}(\mathbb{F}_q) \leq \frac{1}{2}\,\mathcal{C} \cdot \left(\mathcal{C} - \frac{q}{2}K\right) = \alpha\beta + \frac{q}{2}(\alpha + \beta).$$

Théorème

Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ une courbe absolument irréductible de bidegré $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\#\mathcal{C}(\mathbb{F}_q) \leq \frac{1}{2}\,\mathcal{C} \cdot \left(\mathcal{C} - \frac{q}{2}K\right) = \alpha\beta + \frac{q}{2}(\alpha + \beta).$$

Théorème

Soit $\eta \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}_\eta$ une courbe absolument irréductible de bidegré $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$ tels que $\alpha \geq \eta\beta \geq 1$. Alors

$$\#\mathcal{C}(\mathbb{F}_q) \leq \frac{\beta}{2}(2\alpha - \eta\beta - \eta + 1) + \frac{q}{2}(\alpha + \beta).$$

Théorème

Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ une courbe absolument irréductible de bidegré $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\#\mathcal{C}(\mathbb{F}_q) \leq \frac{1}{2}\mathcal{C} \cdot \left(\mathcal{C} - \frac{q}{2}K\right) = \alpha\beta + \frac{q}{2}(\alpha + \beta).$$

Théorème

Soit $\eta \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}_\eta$ une courbe absolument irréductible de bidegré $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$ tels que $\alpha \geq \eta\beta \geq 1$. Alors

$$\#\mathcal{C}(\mathbb{F}_q) \leq \frac{\beta}{2}(2\alpha - \eta\beta - \eta + 1) + \frac{q}{2}(\alpha + \beta).$$

Phénomène sympa : Il n'y a plus de condition autre que l'irréductibilité absolue.

Théorème

Toute surface torique lisse complète est obtenue par suite d'éclatements de $\mathbb{P}^2$ ou d'une surface de Hirzebruch.

Appliquer notre méthode *semble* donner une moins bonne borne que naïvement la borne sur la surface du bas + points sur les diviseurs exceptionnels.

Théorème

Toute surface torique lisse complète est obtenue par suite d'éclatements de $\mathbb{P}^2$ ou d'une surface de Hirzebruch.

Appliquer notre méthode *semble* donner une moins bonne borne que naïvement la borne sur la surface du bas $+$ points sur les diviseurs exceptionnels.

Pour les singulières ? Ça semble peu concluant...

Fort heureusement, ces bornes améliorent des bornes existantes !

Théorème [Stöhr-Voloch 86]

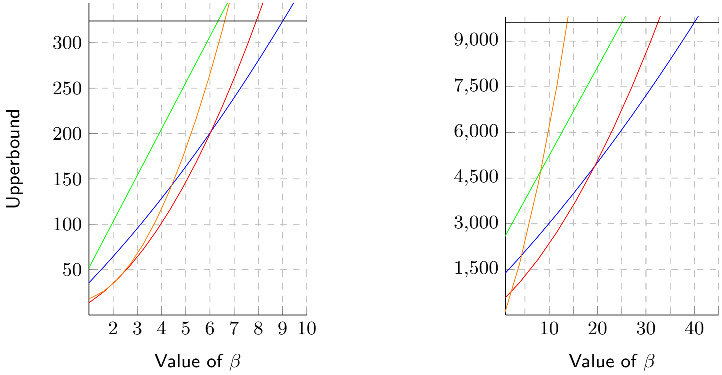
Soit $\mathcal{C}$ une courbe irréductible lisse plongée dans $\mathbb{P}^r$ de degré d, non contenue dans un hyperplan avec $(\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{r-1})$ pour suite d'indices de Frobenius. Alors

$$\#C(\mathbb{F}_q) \leq \frac{\left(\sum_{i=1}^{r-1} \nu_i\right)(2g-2) + (q+r)d}{r}$$

On a toujours $0 = \nu_0 < \nu_1 < \cdots < \nu_r$. Dans le meilleur des cas, $\nu_i = i$.

Théorème [Homma 2012]

Une courbe de degré d dans un espce projectif, sans composante $\mathbb{F}_q$-linéaire a au plus $(d-1)q + 1$ $\mathbb{F}_q$-points.

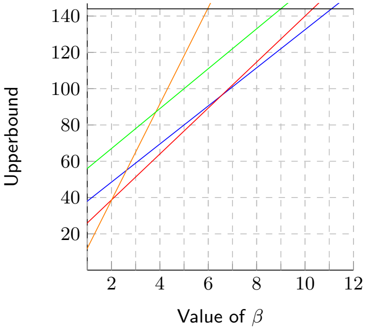


(a) $q = 17$ and $\alpha = 2\beta + 1$

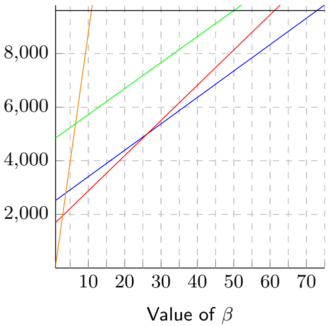
(b) $q = 97$ and $\alpha = 2\beta + 25$

Moi — Stöhr-Voloch — Hasse-Weil — Homma — Ambient

FIGURE – Comparison of bounds on the number of $\mathbb{F}_q$-points on a curve on $\mathcal{H}_2$ of bidegree (α, β)



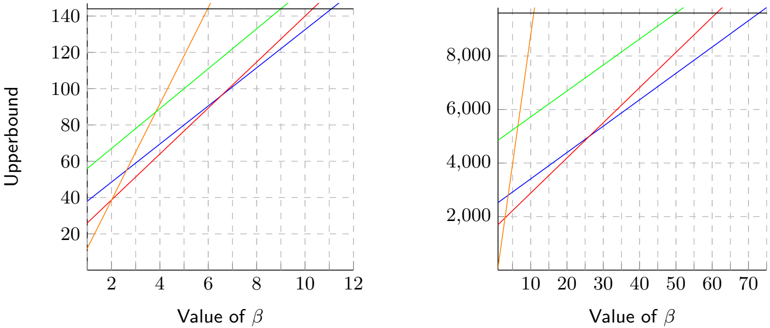
(a) $q = 11$ and $\alpha = 1$



(b) $q = 97$ and $\alpha = 50$

Moi — Stöhr-Voloch — Hasse-Weil — Homma — Ambient

FIGURE – Comparison of bounds on the number of $\mathbb{F}_q$-points on a curve on $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ of bidegree (α, β)



(a) $q = 11$ and $\alpha = 1$

(b) $q = 97$ and $\alpha = 50$

Moi — Stöhr-Voloch — Hasse-Weil — Homma — Ambient

FIGURE – Comparison of bounds on the number of $\mathbb{F}_q$-points on a curve on $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ of bidegree (α, β)

Merci pour votre attention !