Suites, logique, limite et continuité

3 et 4 Septembre 2018

© Exercice du cours ⧫ Exercice plus difficile

1 Suites arithmétiques et géométriques

Exercice 1.0.1. © *Soit une suite arithmétique de raison* $r = 14$. *Si* $a_{23} = 54$, *que vaut* a_0 *?*

Solution: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = a_0 + 14n$. Donc $a_{23} = 54 = a_0 + 14 \times 23$, c'est-à-dire $a_0 = 54 - 14 \times 23 = -268$.

Exercice 1.0.2. © *Calculer la somme des entiers naturels compris entre* 1000 *et* 10000.

Solution: Posons $u_n = 1000 + n$. On veut la suite des termes de u_0 à u_{9000}. On utilise la formule

$$S = \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2} = (9000+1)\frac{1000+10000}{2} = 49\,505\,500.$$

Exercice 1.0.3. © *On considère la suite arithmétique* (a_n) *de raison* r *dont on connaît* $a_{100} = 90$ *et* $a_{1000} = 900$.

1. *Calculer la raison* r *et le premier terme* a_0.
2. *Calculer la somme des termes de* a_{100} *à* a_{1000}.

Solution: On doit résoudre le système

$$\begin{cases} a_0 + 100r & = 90 \\ a_0 + 1000r & = 900 \end{cases}$$

En faisant la différence, on a $900r = 810$, d'où $r = 0.9$. Ainsi, $a_0 = 90 - 100 * 0.9 = 0$.

$$S = \sum_{k=p}^{n} a_k = (n-p+1)\frac{a_p + a_n}{2} = (900+1)\frac{90+900}{2} = 445\,995.$$

Exercice 1.0.4. © *On considère une suite (g_n) géométrique de raison r dont on connaît les termes suivants : $g_3 = 3$ et $g_5 = 12$. Quelles sont les valeurs de r possibles ?*

Solution: On pose $g_n = g_0 r^n$ avec $g_0 \neq 0$. On a donc $g_3 = g_0 r^3 = 3$ et $g_5 = g_0 r^5 = 12$.

$$\frac{g_5}{g_3} = r^2 = 4 \Rightarrow r = \pm 2.$$

Exercice 1.0.5. *Déterminer si les suites suivantes sont arithmétiques ou géométriques. Dans ce cas, indiquer alors la raison et le 1^e terme. Justifier correctement la réponse.*

$$a_n = 3n - 2 \qquad b_n = 3 \times 2^n \qquad c_n = 3^n \times 2^n$$

$$d_n = (n+1)^2 - n^2 \qquad e_n = \frac{2}{n+4} \qquad f_n = \frac{1}{e_n}$$

$$g_n = \frac{-3}{2^{n+1}} \qquad h_n = \frac{3^{2n+1}}{5^{2n}} \qquad i_n = 2^n + 7^n$$

Solution:

— a_n est arithmétique de raison 3 et de premier terme 2 d'après sa forme.
— b_n est géométrique de raison 2 et de premier terme 3.
— $c_n = 6^n$ est géométrique de raison 6 et de premier terme 1.
— $d_n = 2n + 1$ est arithmétique de raison 2 et de premier terme 1.
— e_n n'est ni l'un ni l'autre car $e_0 = \frac{1}{2}$, $e_1 = \frac{2}{5}$ et $e_2 = \frac{1}{3}$ mais $e_1 - e_0 \neq e_2 - e_1$ et $\frac{e_1}{e_0} \neq \frac{e_2}{e_1}$.
— $f_n = n + 4$ est arithmétique de raison 1 et de premier terme 4.
— $g_n = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est géométrique.
— $h_n = 3\left(\frac{9}{25}\right)^n$ géométrique.
— i_n n'est ni l'un ni l'autre. $i_0 = 2$, $i_1 = 9$ et $i_2 = 53$.

Exercice 1.0.6. ©

1. *Calculer les valeurs exactes des sommes suivantes :*

$$1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 512 \qquad 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \tfrac{1}{512}$$

$$2 + 6 + 18 + \ldots + 118098 \qquad 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \ldots + 4096$$

2. ⧫ *Même question avec les sommes suivantes (les "..." signifient que ces sommes contiennent un nombre infini de termes) :*

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \ldots \qquad 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$$

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \ldots \qquad 0.1 + 0.01 + +0.001 + 0.0001 + \ldots$$

Solution:

— $1+2+4+8+\ldots+512=\sum_{k=0}^{9}2^k=\dfrac{1-2^{10}}{1-2}=2^{10}-1=1023$

— $2+6+18+\ldots+118098=\sum_{k=0}^{1}02\times 3^k=2\dfrac{1-3^{11}}{1-3}=3^{11}-1=177146$

— $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{512}=\sum_{k=0}^{9}\dfrac{1}{2^k}=\dfrac{1-\frac{1}{2^{10}}}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\dfrac{1}{2^{10}}\right)$

— $1-2+4-8+16-32+\ldots+4096=\sum_{k=0}^{1}2(-2)^k=\dfrac{1-(-2)^{13}}{1-(-2)}=\dfrac{1+2^{13}}{3}=2731$

On a

$$\sum_{k=0}^{+\infty}q^k=\begin{cases}\frac{1}{1-q} & \text{si } q\in]-1,1[\\ +\infty & \text{si } q\geqslant 1\\ \text{ne CV pas} & \text{si } q\leqslant -1\end{cases}$$

— $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^k}=2$

— $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\ldots=2-1=1$

— $1+2+4+8+\ldots=+\infty$

— $0.1+0.01++0.001+0.0001+\ldots=\frac{10}{9}-1=\frac{1}{9}$

Exercice 1.0.7. © *On décide de partager un gâteau de la façon suivante : la première personne prend la moitié du gâteau ($1/2$), la seconde personne prend la moitié de la moitié restante (soit $1/4$), la troisième personne $1/8$, la quatrième $1/16$, et ainsi de suite.*

1. *Que vaut la proportion du gâteau mangée par la n-ème personne ? et la proportion S_n mangée par les n premières personnes réunies ?*
2. *Vers quoi tend cette proportion S_n quand $n\to+\infty$? Commenter.*

Solution: La proportion du gâteau mangée par la n-ème personne vaut $\frac{1}{2^n}$.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=1-\frac{1}{2^n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$$

Exercice 1.0.8. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.*

1. *Écrire mathématiquement de deux façons que la suite (u_n) est arithmétique.*
2. *Écrire mathématiquement de deux façons que la suite (u_n) est géométrique.*

   On suppose dorénavant que la suite (u_n) est définie par $u_0=4$ et $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{5}+8$.
3. *La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ? Justifier.*

   On considère la suite $v_n=u_n-10$.

4. *Montrer que (v_n) est géométrique.*
5. *En déduire un expression implicite de la suite (u_n).*

Solution:

1. $\exists\, r \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$ OU $\exists\, r \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = r$.
2. $\exists\, q \in \mathbb{R}^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^r$ OU $\exists\, q \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$.
3. On a $u_0 = 4$, $u_1 = \frac{44}{5}$ et $u_2 = \frac{244}{25}$. Donc $u_1 - u_0 = \frac{24}{5}$ et $u_2 - u_1 = \frac{24}{25}$ donc (u_n) n'est pas arithmétique. $\frac{u_1}{u_0} = \frac{11}{5}$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{61}{55}$ donc (u_n) n'est pas géométrique.
4. $v_{n+1} = u_{n+1} - 10 = \dfrac{u_n}{5} - 2 = \dfrac{u_n - 10}{5} = \dfrac{v_n}{5}$ donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme -6.
5. On a $v_n = \frac{-6}{5^n}$ donc $u_n = v_n + 10 = \frac{-6}{5^n} + 10$.

2 Sommes, produits et démonstration par récurrence

Exercice 2.0.1. *Calculer les sommes et produits suivants.*

1. © $\displaystyle\sum_{i=3}^{5} \frac{1}{i-2}$
2. $\displaystyle\sum_{j=2}^{7} j^2 - 1$
3. $\displaystyle\sum_{i=2}^{7} (i^2 - 1)$
4. © $\displaystyle\prod_{k=-4}^{-1} k$.
5. $\displaystyle\prod_{j=0}^{2} (j^3 + 1)$
6. $\displaystyle\prod_{j=0}^{2} 2(j^3 + 1)$

Solution:

1. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$
2. $4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 - 1 = 138$
3. $4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 - 6 = 138 - 5 = 133$
4. $-4 - 3 - 2 - 1 = -10$
5. $1 \times 2 \times 9 = 18$
6. $2^3(1 \times 2 \times 9) = 8 \times 18 = 144$

Exercice 2.0.2.

1. *Calculer* $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.
2. *Calculer* $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k)$ *puis* $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k+1)$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$.

   Indice : On pourra utiliser une agréable écriture de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k$.

Solution:

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)=\frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)}{\prod_{k=1}^{n}k}=\frac{\prod_{k=2}^{n+1}k}{\prod_{k=1}^{n}k}=n+1$

2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k)=2^n\prod_{k=1}^{n}k=2^n n!$

   On a $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k)\times\prod_{k=1}^{n}(2k+1)=(2n+1)!$ donc $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k+1)=\frac{(2n+1)!}{2^n n!}$.

Exercice 2.0.3. ***Changement de variables***

1. *Trouver a, $b\in\mathbb{R}$ tels que* $\displaystyle\frac{1}{k(k+1)}=\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}$ *et en déduire* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$.

   Solution: $\displaystyle\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}=\frac{a(k+1)+bk}{k(k+1)}$. *Par identification, $a=1$ et $b=-a=-1$.*
   $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=1-\frac{1}{n+1}$ *(somme télescopique)*

2. ♦ *Appliquer une méthode similaire pour calculer les sommes suivantes.*

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k^2+2k}$ *(b)* $\displaystyle\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(k-2)}$ *(c)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)(k+2)}$

   Solution:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k^2+2k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{j=3}^{n+2}\frac{1}{j}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$

   (b) $$\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(k-2)}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=3}^{n}-\frac{1}{k}+\frac{1}{k-2}\right)=\frac{1}{2}\left(-\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{j=1}^{n-2}\frac{1}{j}\right)$$
   $$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+1+\frac{1}{2}\right)$$

   (c) Plus technique !
   $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)(k+2)}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-2\sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j}+\sum_{i=3}^{n+2}\frac{1}{i}\\&=1+\frac{1}{2}-2\times1-2\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\\&=-\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\end{aligned}$$

3. ⧫ *Calculer* $\sum_{k=1}^{n} k2^k$ *en utilisant le changement de variable* $j = k-1$.

Solution: $S = \sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{j=0}^{n-1}(j+1)2^{j+1} = 2\sum_{j=0}^{n-1} j2^j + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j+1}$.

Or $\sum_{j=0}^{n-1} j2^j = S - n2^n$ *et* $\sum_{j=0}^{n-1} 2^{j+1} = 2^{n+1}$.

On a donc $S = 2S - 2n2^n + 2^{n+1} = 2S - (n-1)2^{n+1}$ *d'où* $S = (n-1)2^{n+1}$.

Exercice 2.0.4. ***Récurrences classiques*** - *Montrer pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $q \neq 1$,

$$© \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

Exercice 2.0.5. *Soit* (u_n) *la suite définie pour tout* $n > 0$ *par* $u_1 = 1$ *et* $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}$.

Montrer que pour tout $n > 0$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Solution: On montre ceci par récurrence. Pour $n = 1$, on a bien $u_1 = 1 = \frac{1}{\sqrt{1}}$.

Supposons que $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ à un rang n donné. Montrons que $u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}} \overset{\text{HR}}{=} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{n}^2}+1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

ce qui achève la démonstration.

Exercice 2.0.6. *Montrer que, pour tout entier* $n \geqslant 1$, $\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$.

Solution: On montre ceci par récurrence. Pour $n = 1$, le terme de gauche vaut 1 et celui de droite $2 - 1 = 1$.

Sup. que $\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$ à un rang n donné. Mq $\sum_{k=1}^{n+1} k \times k! = (n+2)! - 1$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k \times k! = \sum_{k=1}^{n} k \times k! + (n+1)(n+1)! &\overset{\text{HR}}{=} (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! \\ &= (n+2)(n+1)! - 1 = (n+2)! - 1\end{aligned}$$

Exercice 2.0.7. © *Soit* (u_n) *la suite définie pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *par*

$$u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} .$$

Montrer par récurrence que $u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.
Indice : on pourra utiliser (et démontrer) le fait que $\frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Solution: D'abord, $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \geqslant \frac{1}{(n+1)^2}$ car $n \leqslant n+1$.

Montrons par récurrence que $u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a bien $u_1 = \frac{1}{1^2} \leqslant 2 - \frac{1}{1}$.
Sup. que $u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$ à un rang n donné. Mq $u_{n+1} \leqslant 2 - \frac{1}{n+1}$.

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} \overset{HR}{\leqslant} 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n+1}$$

Exercice 2.0.8. *Soit* (u_n) *une suite définie par* $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Démontrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 2$.

Solution: Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 2$. On a bien $0 < u_0 = 1 < 2$.
Sup. que $0 < u_n < 2$ à un range n donné et montrons que $0 < u_{n+1} < 2$.

$$0 < u_n < 2 \Rightarrow 2 < u_n + 2 < 4 \Rightarrow 0 < \sqrt{2} < \sqrt{u_n + 2} < 2$$

car $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2.0.9. *Démontrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $(n+1)! \geqslant \sum_{k=1}^{n} k!$.

Solution: Montrons ceci par récurrence. pour $n = 1$, on a $2! = 2 \geqslant 1! = 1$.

Supposons que $(n+1)! \geqslant \sum_{k=1}^{n} k!$ à un rang n donné et montrons que $(n+2)! \geqslant \sum_{k=1}^{n+1} k!$.
$\sum_{k=1}^{n+1} k! = \sum_{k=1}^{n} k! + (n+1)! \leqslant 2(n+1)! \leqslant (n+2)(n+1)! = (n+2)!$ car $2 \leqslant n+2$.

3 Ensembles et logique

Exercice 3.0.1. ©

1. *Que vaut* $\mathbb{Z} \cap \mathbb{R}_+$ *?*
2. *Soit* $x \in \mathbb{Q}$. *Montrer qu'il existe* $p \in \mathbb{Z}$ *et* $q \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $x = p/q$.

Solution: $\mathbb{Z} \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{Q}$. Alors il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $q \neq 0$ et $x = p/q = \epsilon(q)p/|q|$ où $\epsilon(q) = \pm 1$ est le signe de q.

Exercice 3.0.2. *Déterminer les négations des propositions suivantes.*

1. © *Il a acheté une casserole et une poêle.*
2. © *Elle déménage à Paris ou à Marseille.*
3. *S'il pleut, je reste à la maison.*

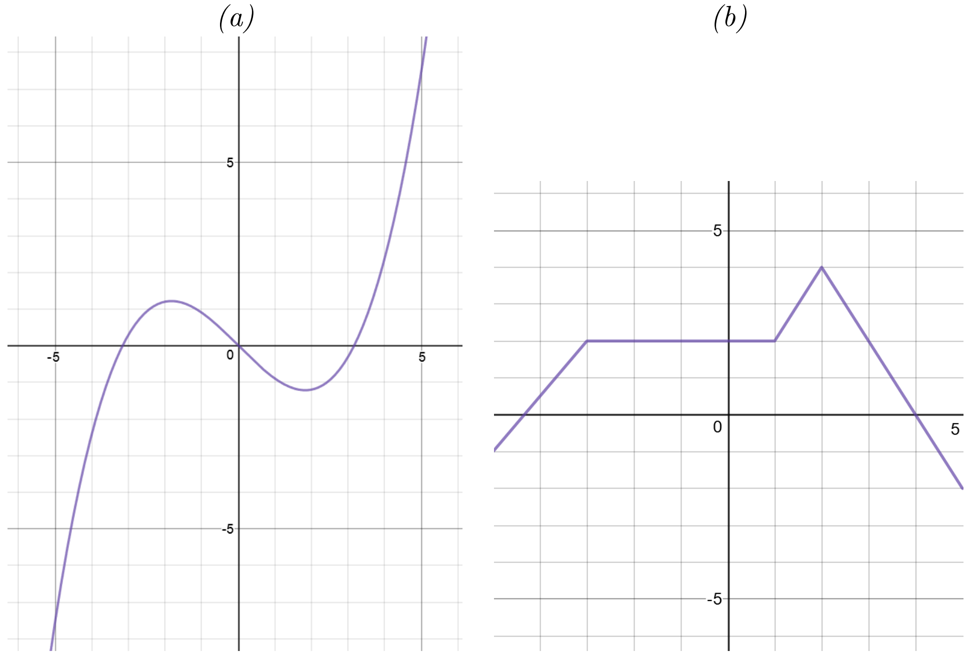
Solution:

1. Il n'a pas acheté une casserole et une poêle (mais il a pu acheter l'un ou l'autre).
2. Il ne déménage ni à Paris, ni à Marseille.
3. Je ne suis pas à la maison et il pleut.

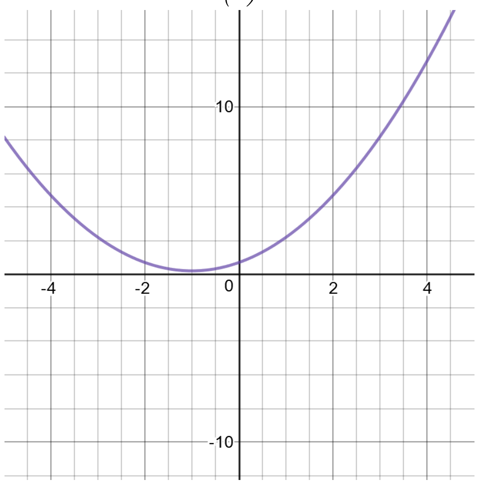
Exercice 3.0.3. *Voici 4 assertions mathématiques et 4 graphes de fonctions de domaine de définition $\mathcal{D} = [-5, 5]$. Chaque fonction vérifie une seule des 4 assertions. Retrouver quelle assertion chaque fonction vérifie.*

1. $\exists x_0 \in \mathcal{D},\ \exists a > 0,\ \forall x \in [x_0 - a, x_0 + a],\ f(x) = f(x_0)$.
2. $\forall x \in \mathcal{D},\ \exists y \in \mathcal{D},\ x \neq y$ *et* $f(x) + f(y) = 0$
3. $\exists a > 0,\ \forall x \in \mathcal{D},\ f(x) \geqslant a$
4. $\exists x \in \mathcal{D},\ \exists y \in \mathcal{D},\ f(x) - f(y) \geqslant 20$

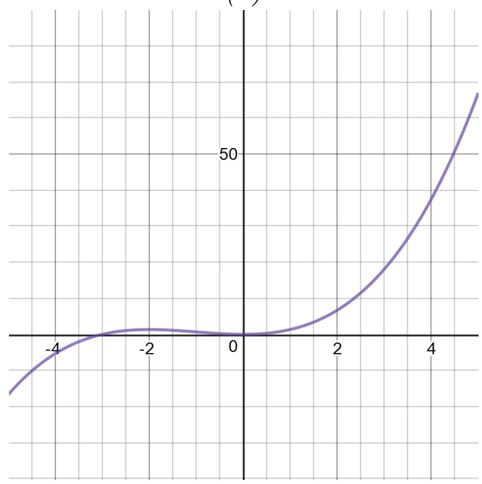
(a) (b)



(c)



(d)



Solution: 1(b) 2(a) 3(c) 4(d)

Exercice 3.0.4. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Écrire en symboles mathématiques les assertions suivantes.*

1. © *La fonction f est positive.*
2. *La fonction f n'est pas négative.*
3. *La fonction f est nulle partout.*
4. © *La fonction f ne s'annule jamais.*
5. © *La fonction f n'est pas majorée par 3 sur $\mathbb{R}$.*
6. *La fonction f est minorée sur $\mathbb{R}$.*
7. ♦ *La fonction f n'est pas bornée.*

Solution:

1. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0.$
2. $\exists\, x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0.$
3. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0.$
4. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0.$
5. $\exists\, x\imath\mathbb{R},\ f(x) > 3.$
6. $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant m.$
7. $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists\, x \in \mathbb{R},\ |f(x)| > M.$

Exercice 3.0.5. ©

1. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Traduire la phrase suivante sous la forme d'une implication : "Si a est 100 fois plus grand que b, alors $\sqrt{a}$ est 10 fois plus grand que $\sqrt{b}$".*
2. *Le théorème de Pythagore stipule que*

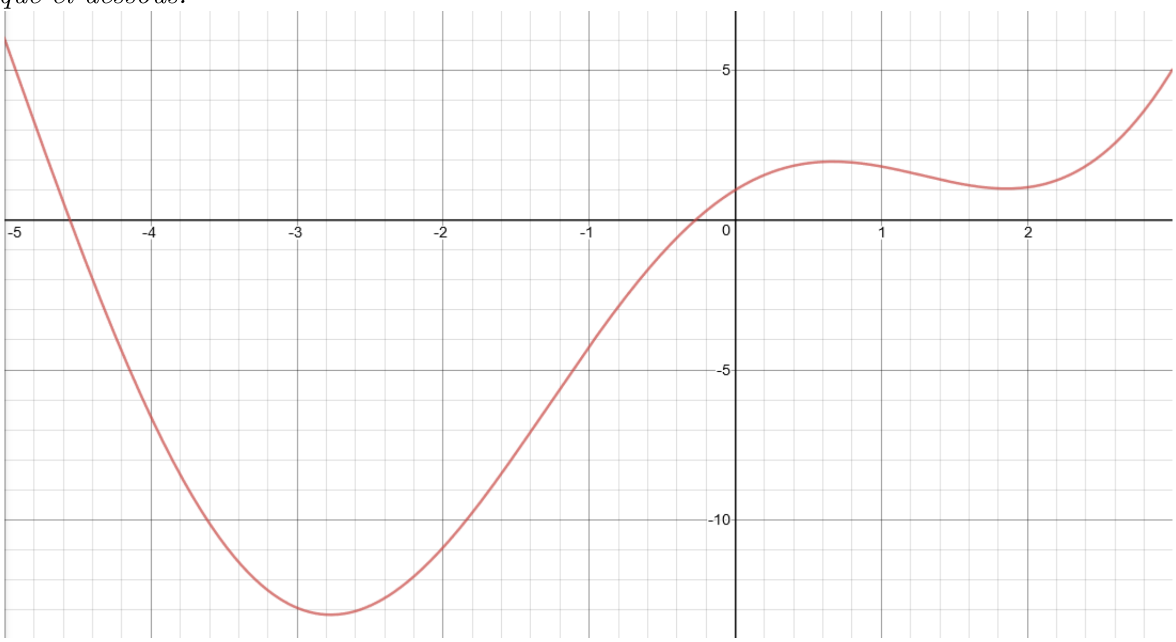
   "Si ABC est un triangle rectangle en C, alors $AB^2 = AC^2 + BC^2$."

   Énoncer la contraposée du théorème de Pythagore. Énoncer aussi la réciproque du théorème de Pythagore et la contraposée de la réciproque.
3. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que l'implication "$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$" est vraie.*
4. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Les assertions "$x^2 > 1$" et "$x > 1$" sont-elles équivalentes ?*

Solution:

1. $a \geqslant 100b \Rightarrow \sqrt{a} \geqslant 10\sqrt{b}$.
2. Contraposée : Si $AB^2 \neq AC^2 + BC^2$ alors le triangle ABC n'est pas rectangle en C.
   Réciproque : Si $AB^2 = AC^2 + BC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en C.
   Contraposée de la réciproque : Si le triangle ABC n'est pas rectangle en C, alors $AB^2 \neq AC^2 + BC^2$.
3. $x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$
4. Non : $x = 2$ vérifie la première mais pas la seconde.8457/

Exercice 3.0.6. *Soit g la fonction définie sur $\mathcal{D} = [-5, 3]$ dont on donne la représentation graphique ci-dessous.*



Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

1. $\forall x \in [-4, -1],\ g(x) < 0$.
2. $\forall x \in \mathcal{D},\ \exists y \in \mathcal{D},\ g(y) = g(x)$.
3. $\exists x \in \mathcal{D},\ \forall y \in \mathcal{D},\ g(y) = g(x)$.
4. $\forall x \in \mathcal{D},\ \exists y \in \mathcal{D},\ y \neq x$ *et* $g(y) = g(x)$.
5. $\forall x \in \mathcal{D},\ g(x) \geqslant -15$.
6. $\exists x \in \mathcal{D},\ \forall M \in \mathbb{R},\ g(x) \leqslant M$.
7. $\forall x \in \mathcal{D},\ \exists M \in \mathbb{R},\ g(x) \leqslant M$.
8. $\exists x \in \mathcal{D},\ \forall M \in \mathbb{R},\ g(x) \leqslant M^2$.

Solution:

1. Vrai
2. Vrai : $y = x$
3. Faux : g serait constante
4. Faux : pour $x = -5$.
5. Vrai
6. Faux : $g(x)$ devrait être $-\infty$
7. Vrai : $M = g(x)$
8. Vrai : il suffit que $g(x) \leqslant 0$ (ex $x = -3$)

4 Généralités sur les fonctions

Exercice 4.0.1. ***Majorants et minorants***

1. *Montrer que la fonction* h *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $h(x) = \cos(x^3) + \dfrac{1}{x^2}$ *est bornée sur* $\mathcal{D} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

   Solution: *Pour tout* $y \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos(y) \leqslant 1$.
   Ainsi, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $-1 \leqslant \cos(x^3) \leqslant 1$ *et* $x^2 \geqslant 1$ *donc* $0 \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant 1$, *ce qui entraîne que* $-1 \leqslant h(x) \leqslant 2$.

2. *Montrer que la fonction* g *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $g(x) = 3 - x^2$ *est majorée par* 3 *mais n'est pas minorée.*

   Solution: $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$. *Donc* $-x^3 \leqslant 0$ *et* $g(x) \leqslant 3$.
   Pour montrer que g *n'est pas minorée, il faut, pour tout* $m \in \mathbb{R}$, *prouver qu'il existe* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $g(x) = 3 - x^2 \leqslant m$, *c'est-à-dire* $x^2 \geqslant 3 - m$. *Pour* $m \geqslant 3$, *n'importe quel* x *convient. Sinon,* $x = \sqrt{3 - m}$ *convient.*

3. © *Soit* $f : U \to \mathbb{R}$. *Montrer que* f *est minorée si et seulement* $-f$ *est majorée. Montrer que* f *est bornée si et seulement si* f *est majorée et minorée.*

   Solution: *La fonction* f *est minorée si et seulement si* $\exists\, m \in \mathbb{R}$, $\forall x \in U$, $f(x) \geqslant m$, *ce qui est équivalent à* $\exists\, m \in \mathbb{R}$, $\forall x \in U$, $-f(x) \leqslant -m$ *et ainsi équivalent à* $\exists\, M = -m \in \mathbb{R}$, $\forall x \in U$, $(-f)(x) \leqslant M$.
   La fonction f *est bornée si et seulement si* $\exists\, M \in \mathbb{R}$, $\forall x \in U$, $|f(x)| \leqslant M$. *Or* $|f(x)| \leqslant M \Leftrightarrow -M \leqslant f(x) \leqslant M$ *et donc* f *est à la fois majorée et minorée.*

4. © *Pour les fonctions suivantes d'une variable réelle* x *donner leur domaine de définition et dire si elles sont majorées, minorées, bornées :* $\frac{1}{x^2}$, $-\sqrt{\log(x)}$, $\exp\left(-x^4\right)$.

   Solution: $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ *est définie sur* $\mathbb{R}^*$, *minorée par* 0 *(positive) mais pas majorée.*
   $x \mapsto -\sqrt{\log(x)}$ *est définie là où* $\log$ *est définie et* $\log(x) \geqslant 0$, *c'est-à-dire sur* $[1, +\infty[$. *Elle est majorée par* 0 *(négative) mais pas minorée.*
   $x \mapsto \exp\left(-x^4\right)$ *est définie sur* $\mathbb{R}$. *De plus, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $-x^4 \leqslant 0$ *donc, par croissance de* $\exp$, $\exp\left(-x^4\right) \leqslant e^0 = 1$. *Sachant que l'exponentielle est positive, la fonction est donc bornée.*

5. © *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par* $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. *Étudier les variations de* f, *montrer que* f *est majorée par* $\frac{1}{2}$ *et minorée par* $-\frac{1}{2}$, *puis tracer son graphe.*

   Solution: $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{1 \times (1 + x^2) - 2x \times x}{(1 + x^2)^2} = \dfrac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

Exercice 4.0.2. ***Monotonie, périodicité et parité***

1. © *Soit* $U =]-\infty, 0[$ *et* $f : U \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = 1/x$. f *est-elle monotone ? Et sur* $U =]0, +\infty[$ *? Et sur* $U =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ *?*

   Solution: *Sur* $]-\infty, 0[$, f *est décroissante donc monotone. Sur* $]0, +\infty[$, f *est croissante donc monotone. Sur* $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$, *on a* $f(-2) \geqslant f(-1)$ *et* $f(-1) \leqslant f(1)$ *alors que* $-2 \leqslant -1 \leqslant 1$. *Donc* f *n'est pas monotone.*

2. © *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on note* $E(x)$ *la partie entière de* x. $E(x)$ *est l'unique entier vérifiant*

   $$E(x) \leqslant x < E(x) + 1.$$

   Soit $\operatorname{frac}(x) = x - E(x)$ *la partie fractionnaire de* x. *Tracer le graphe de la fonction* $x \mapsto \operatorname{frac}(x)$ *et montrer qu'elle est périodique.*

   Solution: *Montrons que* $\operatorname{frac}(x)$ *est* 1*-périodique. Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{frac}(x+1) = x + 1 - E(x+1)$. *Or* $E(x) + 1 \leqslant x + 1 < (E(x) + 1) + 1$ *et par unicité de la partie entière, on a* $E(x+1) = E(x) + 1$. *Donc* $\operatorname{frac}(x+1) = x + 1 - E(x+1) - 1 = x - E(x) = \operatorname{frac}(x)$.

3. ♦ *Soit* P *une fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *où* $a_k \in \mathbb{R}$.

   Quelles conditions doit-on imposer aux réels a_k *pour que* P *soit une fonction impaire ?*

   Solution: *Supposons* P *impaire. Alors pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = -P(-x)$, *c'est-à-dire*

   $$\sum_{k=0}^{n} a_k x_k = -\sum_{k=0}^{n} a_k (-x)^k \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k (x^k + (-x)^k) = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} 2a_{2j} x^{2j} = 0.$$

   Un polynôme est nul sur $\mathbb{R}$ *si et seulement si tous ses coefficients sont nuls. Donc* $a_{2j} = 0$ *pour tout* j. *Ainsi,* P *ne fait intervenir que des puissances impaires de* x.

4. *Montrer que la fonction* h *définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par* $h(x) = \cos(x^3) + \dfrac{1}{x^2}$ *est paire.*

   Solution: *On rappelle que* $\cos$ *est paire. Donc pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$,

   $$h(-x) = \cos\left((-x)^3\right) + \frac{1}{(-x)^2} = \cos(-x^3) + \frac{1}{x^2} = \cos(x^3) + \frac{1}{x^2} = h(x)$$

5. *Que peut-on dire d'une fonction à la fois paire et impaire ?*

Solution: *Soit f définie sur $\mathbb{R}$ à la fois paire et impaire. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x) = -f(-x)$, donc $2f(-x) = 0$ et ainsi f est nulle sur $\mathbb{R}$.*

6. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ T-périodique ($T \neq 0$).*

   (a) *Déterminer la période des fonctions suivantes.*

$$g_1(x) = -2f(x) + 3 \qquad g_2(x) = f(\tfrac{x}{4})) \qquad g_3(x) = f(2x+1)$$

Solution: *$g_1(x+t) = g_1(x) \Leftrightarrow f(x+t) = f(x)$. Donc $t = T$.*
$g_2(x+t) = g_2(x) \Leftrightarrow f(\frac{x+t}{4}) = f(\frac{x}{4})$ donc $\frac{t}{4} = T \Rightarrow t = 4T$
$g_3(x+t) = g_3(x) \Leftrightarrow f(2x+2t+1) = f(2x+1)$ Donc $2t = T \Rightarrow t = \frac{T}{2}$.

   (b) ♦ *Démontrer que la fonction g définie par $g(x) = xf(x)$ n'est pas périodique.*

Solution: *Supposons g t-périodique ($t \neq 0$). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $xf(x) = (x+t)f(x+t)$. En $x = x+T$, on a $(x+T)f(x) = (x+T+t)f(x+t)$. Si $n \neq 0$,*

$$f(x) = \frac{(x+t)f(x+t)}{x} = \frac{(x+T+t)f(x+t)}{x+T} \Rightarrow (x+t)(x+T) = x(x+T+t)$$

Donc $t(x+T) = tx \Rightarrow tT = 0$, ce qui est impossible (périodes non nulles).

7. © ♦ *On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sin\big(\pi f(x)\big)$, où f est définie à la question 5 (ex précédent). Déduire de l'étude de f les variations, la parité, la périodicité de g et tracer son graphe.*

Solution: *g est impaire mais non périodique. De plus, $g'(x) = f'(x)\cos(\pi f(x))$. Puisque que f est comprise entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$, le cosinus est positif donc g' a le même signe que f' et g les mêmes variations que f.*

5 Limite et continuité

Exercice 5.0.1. *Déterminer, si elles existent, les limites suivantes.*

1. © $\dfrac{2x^2 - x - 2}{3x^2 + 2x + 2}$ *en* 0 *et en* $+\infty$
2. $\dfrac{x^2 + x - 4}{4x^3 - x^2 + 2}$ *en* 0 *et en* $+\infty$
3. © $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *en* $+\infty$
4. © $\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$ *en* $+\infty$
5. $xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *en* 0
6. $\dfrac{1}{x-1}$ *en* 1
7. $\dfrac{1}{(x-1)^2}$ *en* 1
8. $\dfrac{x+1}{x^2-1}$ *en* 1 *et* -1
9. © ♦ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x}$.
10. © ♦ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$?

Solution:

1. -1 en 0 et $\frac{2}{3}$ en $+\infty$
2. 2 en 0 et 0 en $+\infty$
3. $\dfrac{1}{x} \to 0$ donc $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \to \sin(0) = 0$
4. $-\dfrac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ donc $\frac{\cos x}{\sqrt{x}} \to 0$ par le théorème des gendarmes
5. $\dfrac{1}{x} - 1 < E\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant \dfrac{1}{x} \Rightarrow 1 - x < xE\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant 1$ donc $xE\left(\frac{1}{x}\right) \to 0$ (gendarmes)
6. pour $x < 1$, $-\infty$ et pour $x > 1$, $+\infty$
7. $+\infty$ (carré de la précédente)
8. $\dfrac{x+1}{x^2-1} = \dfrac{1}{x-1} \underset{x \to -1}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{2}$ et voir (6) pour $x = 1$
9. $\dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x} = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x} \times \dfrac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2}} = \dfrac{x(1-x)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2})}$

   Donc $\frac{(1-x)}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2})} \to \frac{1}{2}$
10. $\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \dfrac{(-2)^2}{(x-2)(x-1)} = \dfrac{x-2}{x-1} \to 0$

Exercice 5.0.2.

1. *© En utilisant la définition de la limite (avec ϵ et δ), montrer que $\lim\limits_{x \to 2} (3x+1) = 7$.*

   Solution: *Soit $\epsilon > 0$. On cherche $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [2-\alpha, 2+\alpha]$, $7 - \epsilon \leqslant 3x + 1 \leqslant 7 + \epsilon$. En remplaçant, on a $7 - 3\alpha \leqslant 3x + 1 \leqslant 7 + 3\alpha$. Donc $\alpha = \frac{\epsilon}{3}$ convient.*

2. *Même question pour $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 + 1 = +\infty$.*

   Solution: *Soit $M > 0$. On cherche $A > 0$ tel que pour tout $x \geqslant A$, $x^2 + 1 \geqslant M$. En remplaçant, on a $x^2 + 1 \geqslant A^2 + 1$. Donc $A = \sqrt{M-1}$ convient pour $M \geqslant 1$.*

3. *© Montrer que si f admet une limite finie en x_0 alors il existe $\delta > 0$ tel que f est bornée sur $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.*

   Solution: *Supposons que f tende vers $l \in \mathbb{R}$ en x_0. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $-\epsilon \leqslant f(x) - f(x_0) \leqslant \epsilon$. Donc $f(x_0) - \epsilon \leqslant f(x) \leqslant f(x_0) + \epsilon$. Ainsi, f est à la fois majorée et minorée : elle est bornée.*

4. *© Soit f une fonction continue et x_0 tels que $f(x_0) = 1$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que : pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\quad f(x) > \frac{1}{2}$.*

   Solution: *Écrivons la définition de la continuité avec $\epsilon = \frac{1}{2}$. Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\quad |f(x) - 1| < \epsilon$. Donc $-\frac{1}{2} < f(x) - 1 < +\frac{1}{2}$. On a donc en particulier $f(x) > \frac{1}{2}$.*

5. *Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ tel que pour tout x, $y \in [a, b]$ tels que $x \neq y$, $|f(x) - f(y)| < |x - y|$. Montrer que f est continue sur $[a, b]$.*

Solution: *Soit $x_0 \in [a, b]$ et $\epsilon > 0$. Trouvons $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Puisque $|f(x) - f(x_0)| < |x - x_0|$, $\delta = \epsilon$ convient.*

Exercice 5.0.3. ***Fonctions définies par morceaux***

1. *Les fonctions suivantes sont-elles continues sur $\mathbb{R}$?*

$$f(x) = \begin{cases} |x| + x + 1 & si\ x \leqslant 1 \\ x(x^2 + 1) & si\ x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} e^x(x + 1) & si\ x < 0 \\ 1 - x & si\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

Solution: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \leqslant 1}} f(x) = 3$ *et* $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = 2$ *donc f n'est pas continue en 1.*
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} g(x) = 1 = g(0)$ *et* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = 1$ *donc g est continue en 0. De plus elle est continue sur $\mathbb{R}^*$ car opérations de fonctions de références.*

2. *Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln|x|} & si\ x \notin \{0, 1, -1\} \\ 0 & si\ x \in \{0, 1, -1\} \end{cases}.$$

Déterminer le domaine de continuité de g.

Solution: *g est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$.*
En 0 : $\lim_{x \to 0} \frac{1}{\ln|x|} = 0 = g(0)$ car $\lim_{x \to 0} \ln|x| = -\infty$.
En 1 : $\lim_{x \to 1} \frac{1}{\ln|x|} = \pm\infty$ car $\lim_{x \to 1} \ln|x| = 0$.
En -1 : $\lim_{x \to -1} \frac{1}{\ln|x|} = \pm\infty$ car $\lim_{x \to 1} \ln|x| = 0$.
Donc g est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$

3. © *Trouver les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ si $x < 0$ et $f(x) = \exp(x)$ si $x \geqslant 0$ soit continue sur $\mathbb{R}$. Et si on avait $f(x) = \dfrac{a}{x-1} + b$ pour $x < 0$?*

Solution: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = b$ *et* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \geqslant 0}} = 1$*. Donc $b = 1$ et $a \in \mathbb{R}$.*
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -a + b$ *et* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \geqslant 0}} = 1$*. Donc $a \in \mathbb{R}$ et $b = a + 1$.*

Exercice 5.0.4. *Déterminer le domaine de définition et de continuité des fonctions suivantes :*

$$a(x) = \sqrt{2 - x} \qquad b(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{2x - 3} \qquad c(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$© \ f(x) = \frac{1}{\sin x} \qquad © \ g(x) = \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{2}}} \qquad © \ h(x) = \ln(x^2 + x - 1)$$

Solution:

$\mathcal{D}_a = [2, +\infty[$

$\mathcal{D}_b = \left[-1, \frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$

$\mathcal{D}_c = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$

$\mathcal{D}_g = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$

$\mathcal{D}_h = \mathbb{R}$ car $x^2 + x + 1 > 0$ $(\Delta = 1 - 4 - 3)$

Exercice 5.0.5. ©

1. *Étudier la continuité de* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par :* $f(x) = \sin(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ *si* $x \neq 0$ *et* $f(0) = 0$.

   Solution: *f est continue sur $\mathbb{R}$ car $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ d'après le théorème des gendarmes sachant que* $-\sin(x) \leqslant \sin(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \sin(x)$.

2. ♦ *La fonction définie par* $f(x) = \frac{x^3+8}{|x+2|}$ *admet-elle un prolongement par continuité en* -2 *?*

   Solution: $x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$ *donc* $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 4 & \text{si } x > -2 \\ -x^2 + 2x - 4 & \text{si } x < -2 \end{cases}$ *Or* $(-2)^2 - 2(-2) + 4 \neq 0$ *donc les limites à gauche et à droite diffèrent. NON.*

3. ♦ *Soit la suite définie par* $u_0 > 0$ *et* $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$. *Montrer que* (u_n) *admet une limite* $\ell \in \mathbb{R}$ *lorsque* $n \to +\infty$. *À l'aide de la fonction* $f(x) = \sqrt{x}$ *calculer cette limite.*

6 Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 6.0.1. *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation est le suivant. Donner le nombre de solutions de* $f(x) = 0$ *et de* $f(x) = -5$.

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Solution: 0 a 3 antécédents par f et -5 en a un.

Exercice 6.0.2.

1. © *Soient* $P(x) = x^5 - 3x - 2$ *et* $f(x) = x2^x - 1$ *deux fonctions définies sur* $\mathbb{R}$. *Montrer que*

   (a) *l'équation* $P(x) = 0$ *a au moins une solution dans* $[1, 2]$ *;*

   Solution: *TVI car* $0 \in [P(1), P(2)] = [-4, 24]$

   (b) *l'équation* $f(x) = 0$ *a au moins une solution dans* $[0, 1]$ *;*

   Solution: *TVI car* $0 \in [f(0), f(1)] = [-1, 1]$

   (c) *l'équation* $P(x) = f(x)$ *a au moins une solution dans* $]0, 2[$.

Solution: *TVI sur $g(x) = P(x) - f(x)$ car $0 \in [g(0), g(2)] = [-1, 17]$*

2. *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)^2 = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$ sur $\mathbb{R}$. (Indication : démonstration par l'absurde)*

   Solution: *Supposons par l'absurde qu'il existe c, $y \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 1$ et $f(y) = -1$. Puisque f est continue, d'après le TVI, il existe z compris entre x et y tel que $f(z) = 0$, ce qui est absurde.*

3. *© Montrer qu'il existe $x > 0$ tel que $2^x + 3^x = 7^x$.*

   Solution: *Soit $f(x) = 7^x - 2^x - 3^x$. Alors $f(0) = -1$ et $f(1) = 2$. Comme $0 \in [-1, 2]$, d'après le TVI, il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $f(\alpha) = 0$*

4. *© Dessiner le graphe d'une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que*

   (a) $f(\mathbb{R}) = [0, 1]$
   (b) $f(\mathbb{R}) =]0, 1[$
   (c) $f(\mathbb{R}) = [0, 1[$
   (d) $f(\mathbb{R}) =]-\infty, 1]$
   (e) $f(\mathbb{R}) =]-\infty, 1[$

5. *© Soient $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Quelles sont, parmi les fonctions suivantes, celles dont on peut affirmer qu'elles sont bornées : $f + g$, $f \times g$, f/g ?*

   Solution: *Supposons f bornée par M_f et g bornée par M_g. Alors $f + g$ est bornée par $M_f + m_g$ et $f \times g$ est bornée par $M_f M_g$. Néanmoins, ce n'est pas vrai pour f/g. Exemple : $f = 1$ et $g = x$.*

6. *Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.*

   Solution: *Posons $g(x) = f(x) - x$. Alors $g(0) \geqslant 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$. En appliquant le TVI à g, il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $g(x_0) = 0$, càd $f(x_0) = x_0$*

7. *© ♦ Soient f et g deux fonctions continues sur $[0, 1]$ telles que $\forall x \in [0, 1]$ $f(x) < g(x)$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $\forall x \in [0, 1]$ $f(x) \leqslant g(x) - m$. Ce résultat est-il vrai si on remplace $[0, 1]$ par $\mathbb{R}$?*

   Solution: *Posons $h = g - f$. Alors h est continue sur l'intervalle fermé $[0, 1]$ donc h est borné, en particulier minoré. Appelons m son plus grand minorant. Ainsi $m > 0$ et pour tout tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) - f(x) \geqslant m$, càd $f(x) \leqslant g(x) - m$.*

   En revanche, c'est faux sur $\mathbb{R}$. Prenons $f(x) = e^x$ et $g(x) = f(x) + e^{-x}$. On a $g(x) - f(x) \to 0$ en $+\infty$.